



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

Math-54

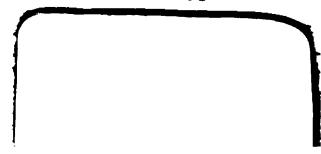
Math-54



UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT



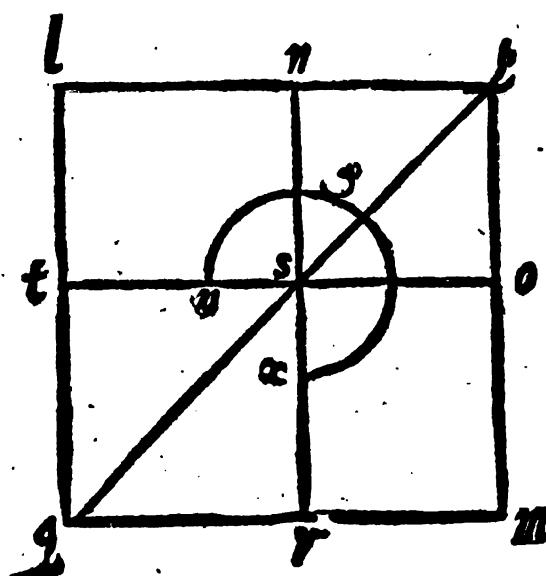
900000070116



E V C L I D I S
E L E M E N T V M
D E C I M V M,

IN QVO
SINGVLARVM DEMONSTRA-
tiōnum lineæ, & superficies, tam Commensurabi-
les, & Incommensurabiles, Quam Rationales, &
Irrationales, accuratè numeris exprimuntur.

A U T H O R E
FLORIMONDO PUTEANO,
VATANI DOMINO.



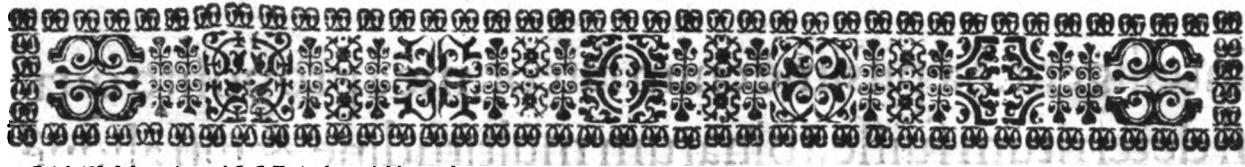
P A R I S I I S.

Apud IOANNEM DE HEVQVEVILLE, via Jacobæa,
sub Signo Pacis.

M. D C X I I .

C V M P R I V I L E G I O R E G I S .





ALLEGORICO LECTORI.



NQVIRE S fortassis (beneuole Lector),
quo ingenio motus, linea& figurarum io.
Euclidis numeris exprimere tentauerim,
præsertim cùm à nemine id factum esse
mihi constet, breui tamen satisfaciam, rationesque, quæ
me impulerunt detegam, quârum præcipua fuit amor
scientiæ, & veritatis, tum quia in numeris rerum omniū
imagines, veluti in speculo, clarius, inspiciuntur. Igitur
cum Algebraem ex Stifelij Algebra didicisse, namque
manu scriptam ab amico traditam vidi, quam pri
mus sub via tantum regulâ seduxit (quod pac Clauij
sit dictum) volui exercitationis gratiâ experiri tentare,
an ex iis, quæ ex eo didiceram, librum hunc ad usum ap
plicare fas esset: Quantum enim ad cognitionem illius,
satis ex demonstrationibus Clauij eram edoctus. Sed
quoniam (vt ipsem Clavius dixit) nemini concessum
est, hunc io. Euclidis librum ad usum reuocare, qui Al
gebraem ignorat. Dubitans etiam adhuc de meo in hac
arte ingeniolo, mirum in modum desideraui, hanc pro
uinciam suscipere, vt inde de meis vigiliis hac in re sus
ceptis iudicare possem. Quot sudores, quot labores
pertulerim qui exactam huius libri notitiam habuerūt,
vel qui hunc Mathematicorum crucem nominauere,

intelligent. Sæpiissimè enim fateor, me à proposito qua-
si deterritum fuisse, spinarum multitudine, & nisi aliquē
fructum studiosis adferre putassem, certe opus imper-
fectum reliquissem. Tibi igitur (Beneuole Lector) pla-
cere volui, tibi etiam proficere, sicut & mihi, sed vereor
ne aliter contingat, neue plus molestiæ, quam iucundi-
tatis aut utilitatis ex eo suscipias. Quoniam vero propriū
est viri probi, ea ex animo excipere, quæ animo offerun-
tur, Improbis vero nihil timeo, nihil etiam desidero. Lege
& diligenter examina, & si quos errores in illo depre-
hendis, libenter emendatos feram, cum illum beatum
esse putem, qui cognitione errorum moliqr, aut do-
ctior redditur. Hæc tibi, & mihi fælicitas contingat.

Vale.





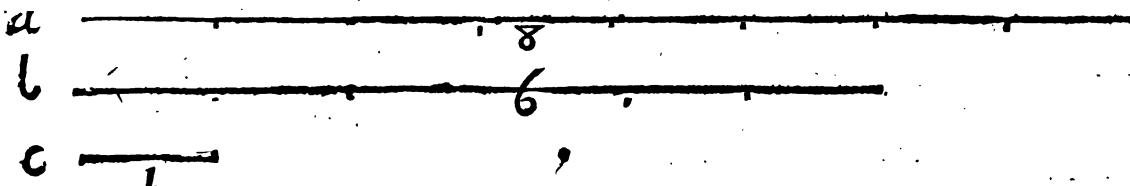
E V C L I D I S E L E M E N T U M X.

Definitiones.



DEFINITIO I.

OMMENS V R A B I L E S magnitudines dicuntur quas eadem mensura metitur.



DVÆ magnitudines a , & b , commensurabiles dicuntur quia habent communem mensuram c , que viramque a , & b , metitur.

EX CLAVIO.

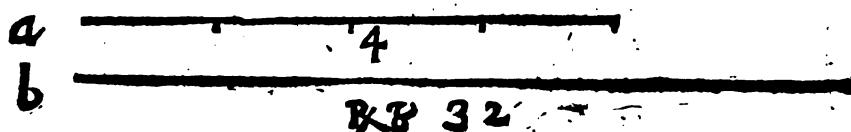
EODEM modo commensurabiles sunt linea 20. palmorum & linea 13. palmarum. Quia eas linea, tam vna palma, quam dimidiata palma, quam tertia partis vnius palma metitur.

Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas vna & eadem superficies metitur.

Item corpora solidâne, commensurabilia, qua metitur idem corpus seu solidum.

DEFIN. II.

INCOMMENSURABILES autem quarum nullam communem mensuram contingit teperiri.



INCOMMENSURABILES magnitudines a , & b , quia nullam inter se habent communem mensuram, que viramque metiri posse.

Rursus superficies dicuntur incommensurabiles, solidâne incommensurabilia, qua nullam communem admittunt mensuram.

EX CLAVIO.

T A L E S magnitudines sunt diameter quadrati eiusius, & latus eiusdem, quoniam nullam habens communem mensuram, ut ex ultima propositione libri primi patet.

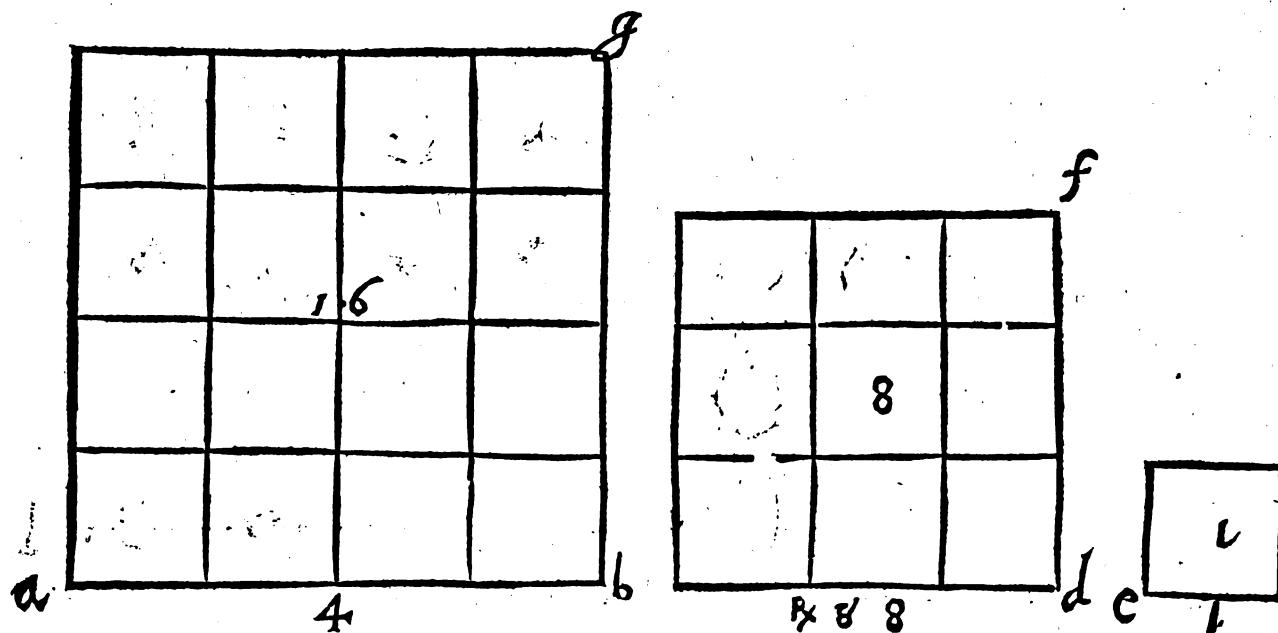
A

EVCLIDIS

Sunt etiam quamplurima alia linea incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo posset, quarum multis hoc libro Geometria explicat, doctaque quamam ratione inveniri possint.

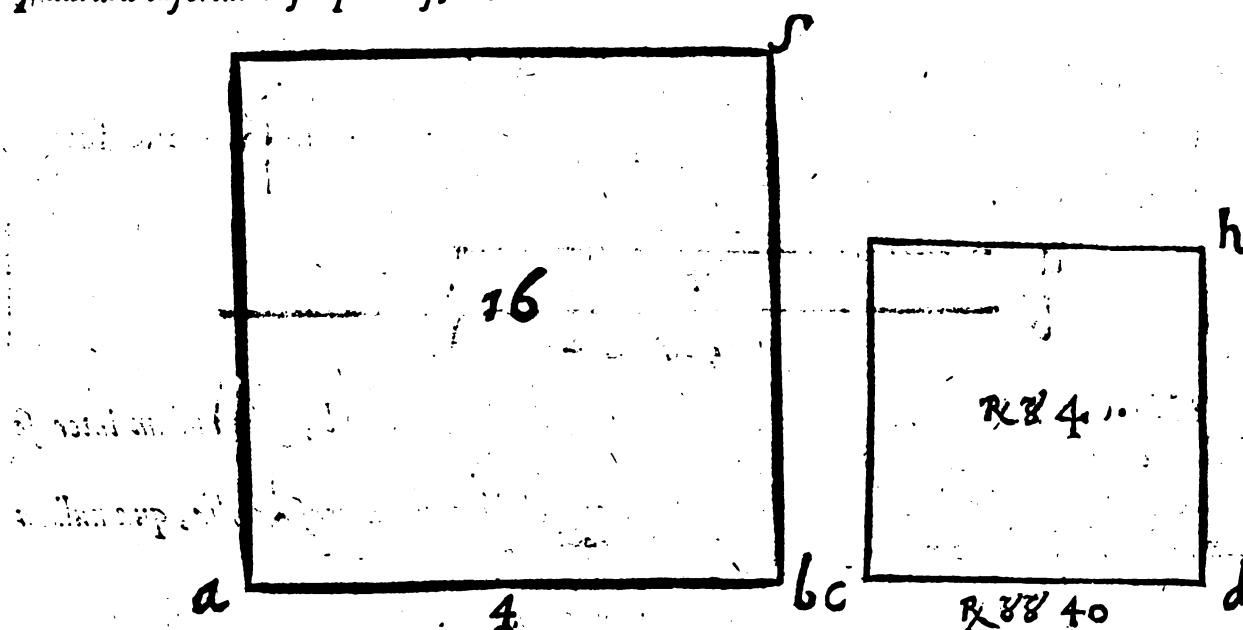
DEFINIT. III.

RECTAE lineæ potentia commensurabiles sunt, quando quæ ab ipsis quadra-ta eadem area dimetitur.



LINEÆ $a b$, & $c d$, potentia sunt commensurabiles, quia earum quadrata habent inter se unam, & eandem communem mensuram, id est unam, & eandem aream nempe e , quæ utrumque quadratum ex illis $a b$, & $c d$, descripium metitur. Quamuis lineæ illæ inter se sint omnino longitudine incommensurabiles, nec habere possint communem aliquam mensuram utramque $a b$, $c d$, metientem.

Linearum autem incommensurabilium, aliae sunt eiusmodi, ut earum quadrata sint com-mensurabilia. Aliae verò ita se habent, ut & earum quadrata, sint etiam incommensurabilia, ut quadrata inferius descripta a f , & $c h$.



Lineæ enim $a b$, & $c d$, longitudine sunt incommensurabiles, quia nullam habent commu-

ELEMENTVM DECIMVM.

non mensuram utramque metientem. Potentia etiam incommensurabiles erunt, quia ut constat ex ista definitione earum quadrata nullam habent aream communem, quae utrumque quadratum ex illis descriptum metiri possit.

EX CLAVIO.

QVOD si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine, respondendum est, lineas longitudine commensurabiles satis superque esse explicatas in definitione magnitudinum commensurabilium, cum huiusmodi lineas una communis mensura metiatur, ut dictum est. At vero quoniam lineas potentia commensurabiles, nulla communis mensura metiri potest, sed tantummodo earum quadrata idem spatium metitur, ideo necessarium erinum fuit, ut ea propria definitione explicarentur.

SCHOLIVM.

HIC aduertendus est Lector, quid per potentiam linea sit intelligendum. Potentia enim linea cuiusvis, nihil aliud est, quam quadratum ex illa descriptum.

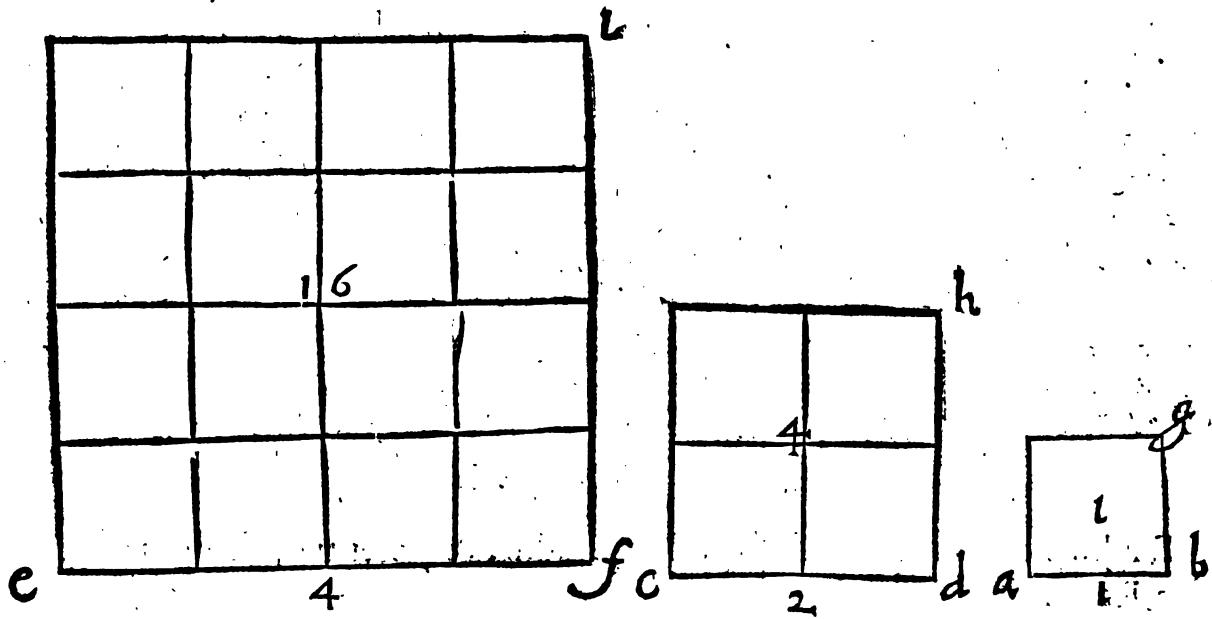
DEFINITIO. IIII.

INCOMMENSURABILES autem cum quadratis earum nulum spatium, quod sit communis eorum mensura contingit reperiri.

OMNES lineae, que nullam admittunt communem mensuram, quarum etiam quadrata nullam aream habent pro communi mensura, recte ab Euclide appellantur potentia incommensurabiles, ut ex antecedenti definitione facile est colligere.

EX CLAVIO.

HABENT autem lineae commensurabiles tanquam potentia hanc quasi conuenientiam inter se, & connectionem, ut linea longitudine commensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, ita ut nulla linea dari possint commensurabiles longitudine, quia earum quadrata commensurabilita quoque sunt, quoniam quadratum ex communis earum mensura descriptum metitur tanquam mensura communis earum quadrata, ut in subiecta figura appareret.



SIC VIT enim recta a b, metitur rectas c d, e f. Ita quoque quadratum a g, quadrata c b, e i, metitur. Non autem, ut omnes linea potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine: multa enim linea sunt potentia commensurabiles; hoc est, quadrata habent commensurabilita, que tamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, ut in hoc libro demonstrabitur.

Ryssus inter lineas incommensurabiles tanquam potentia, huiusmodi colligatio reperitur, ut omnes linea potentia incommensurabiles, sint etiam incommensurabiles longitudine: Non autem contra, ut omnes linea longitudine incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles potentia, cum multa linea reperiatur longitudine inter se incommensurabiles, cum de-

A ij

E V C L I D I S

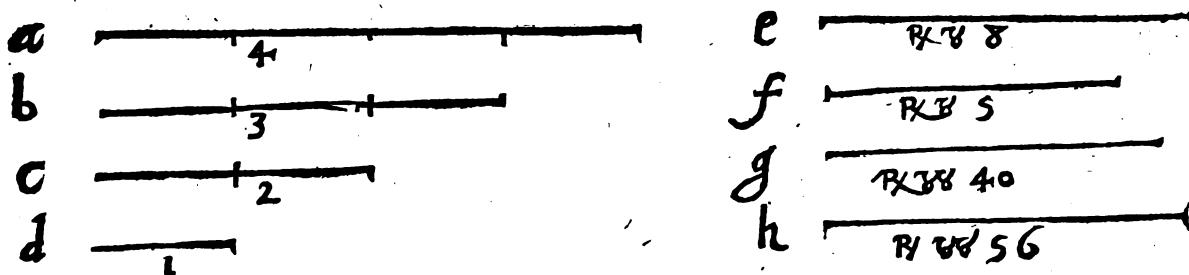
mēn potentia, hoc est secundum earum quadrata, commensurabiles existant. Que quidem omnia perspicua erunt ex coroll. prop. 9. huius libri.

DEFINIT. V.

His positis ostenditur, cuicunque rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia, alias vero potentia solùm. Vocetur autem proposita recta linea Rationalis.

OMNI lineæ propositæ, omnes aliae, que illi comparantur, erunt aut commensurabiles, aut incommensurabiles.

Commensurabiles quidem, si linea illæ, quæ sunt comparatae, linea proposita habent cum proposita aliquam mensuram communem utramque metientem, ut si linea, a, sit proposita, illi vero sint comparatae b, & c, manifestum est lineas illas b, & c, linea a, propositæ esse commensurabiles, cum inter se linea illæ habeant communem mensuram utramque metientem nimis, d.



INCOMMENSURABILES vero si linea, que comparantur linea proposita, non habent aliquam mensuram communem, ut si linea, e & f, rationali, a, sint comparatae, quia inter lineas illas non reperitur mensura communis, ideo incommensurabiles erunt longitudine a, e, & f, quamvis potentia sint commensurabiles.

Rursus si linea g, & h, rationali a, sint comparatae, erunt a, g, & h, inter se & longitudine, & potentia incommensurabiles.

Longitudine quidem, cum nullam habeant inter se communem mensuram.

Potentia vero, quia earum quadrata nullam habent aream communem, que possit metiri quadrata ab illis descripta.

EX CLAVIO.

LINÆ autem illæ propositæ, ratione cuius aliae commensurabiles sunt, vel incommensurabiles dicitur Gracis p[ro]m[ptu]r[ia], Latinis vero Rationalis, quoniam ea ponitur semper certa, & nota, aliae vero cum illa comparatae non semper nota sunt, quamvis singule seorsum sumpta existant certe quoque, ac nota, cum quelibet in quotcumque partes e[st]ales possit dividiri.

DEFIN. VI.

Et huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

SI linea quævis rationali proposita, vel longitudine, vel potentia sit commensurabilis, sine dubio linea illa rationalis est.

Hinc colligitur omnem lineam propositam absolute & simpliciter consideratam esse rationalem, cum hæc in tot partes e[st]ales diuidi queat, quorū libuerit: Huic igitur commensurabiles vel longitudine & potentia simul, vel potentia tantum, rationales erunt.

EX

ELEMENTVM DECIMVM.

5

EX CLAVIO.

ITaque ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. est. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. est: dicitur Rationalis, cum potentia sit commensurabilis linea Rationali (est enim tam numerus 20. quam 1000. commensurabilis numero cuiusque quadrato, vt 16. 100. &c.) quamvis longitudine sit eidem incommensurabilis.

Decipiuntur ergo Arithmeticci non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non possit exprimi.

DEFIN. VII.

Huic verò incommensurabiles, Irrationales vocentur.

CVM antea Euclides dixerit, lineas, quæ rationali propositæ sunt commensurabiles, vel longitudine & potentia simul, vel potentia tantum, rationales esse: liquidò constat eas, quæ illi viroque modo incommensurabiles existunt, Irrationales esse.

DEFIN. VIII.

Et quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

SI ex linea rationali, quadratum descriptum sit, oportet necessariò illud rationale esse. Nam quemadmodum linea illa, quæ proponitur semper est notæ magnitudinis (cum ad placitum sumatur, & diuidatur.) Sic quadratum ab ea descriptum, semper est certum, ac notum & ideo Rationale.

Aliæ verò superficies, quæ illi comparantur, si forte cum quadrato illo habent aream quendam promensura communi, Commensurabiles appellantur, si non habent Incommensurabiles censeri debent.

DEFIN. IX.

Et huic commensurabilia quidem Rationalia.

SI quadratum propositum Rationale existat, omnia alia quadrata quæ huic commensurabilia sunt, Rationalia erunt. Nam quemadmodum linea, quæ rationali propositæ sunt commensurabiles vel longitudine & potentia simul, vel potentia tantum, sunt Rationales: Ita superficies & quadrata, quæ superficie alicui sunt commensurabilia, Rationalia sunt.

Quod verum est non solum, quantum ad quadrata, sed etiam quantum ad ceteras figuras Geometricas, quæ inter se habent aream quendam promensura communi.

EX CLAVIO.

QVONIAM vero lineæ potentes ipsa spacia commensurabilitas, quadrato Rationalis lineæ proposita, sine saltem potentia commensurabiles linea Rationali ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

DEFIN. X.

Huic verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

EX CLAVIO.

NON aliter superficies planæ quadrato à Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali proposita prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

DEFIN. XI.

Et rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sunt, ipsa late-

B

E V C L I D I S

ra; si vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatiis incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT Euclides lineas, que possunt spatia, vel quadrata irrationalia, Irrationales: quemadmodum & quadrata illa Irrationalia dicuntur. Irrationalia autem spatia illa sunt, quando quadrato linea Rationalis incommensurabilia sunt, Ita ut si spatia illa sint quadrata, linea, à quibus quadrata illa describuntur Irrationales sunt.

Si autem spatia illa non fuerint quadrata, sed aliæ rectilineæ figuræ, linea potentes spatia illa, Irrationales appellantur.

EX CLAVIO.

PRAETEREVNDVM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atque potentia tantum: apponere ferè semper vocibus istis: commensurabiles ac incommensurabiles: Vix autem & rariissimè bis: Rationales & Irrationales: Rectè enim dicuntur linea commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum. Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum. Minus verò rectè Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel potentia tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduerit, occasionem multis prabuit, ut variè, & obscurè in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusque sint locuti.

Ceterum his definitionibus postulatum unum, & nonnulla pronunciata, quorum usus in hoc libro reperitur.

Postulatum siue Petitio.

EX CLAVIO.

POSTULETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inequalibus, cum major infinita non sit, minor vero infinitè posse augeri, perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem.

Constat hoc etiam ex ijs, que in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tūm demum censeri eiusdem generis, cum alterutra ita potest multiplicari, ut alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentia, diversi esse generis, docuimus.

Axiomata siue Pronunciata.

AXIOMA. I.

MAGNITVDO quotunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

AXIOMA. II.

MAGNITVDO quamcumque magnitudinem metiens, metitur quoque comprehendens magnitudinem, quam illa metitur.

AXIOMA. III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

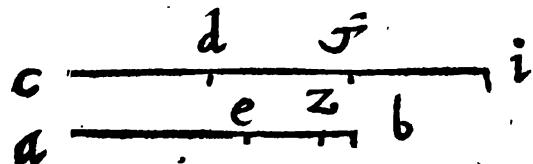
ELEMENTVM DECIMVM.

7

HÆC axiomata, ut ad numeros pertinent, ostensa sunt à nobis in ultimis tribus pronuntiationib. 7. Quare cùm sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frusta eorum demonstrationes hic repetamus, præferrim quod ad verbum huc possint transferri, mutata solum voce, numeri, in vocem magnitudinis.

Theor. i. Propos. i.

DUVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiore auferatur maius quādum dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus detrahatur maius quādum dimidium, & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.



EXPONANTVR duæ magnitudines a b , & c d , inæquales, quarum a b , maior: c d , verò minor. Dico si ex a b , auferatur maius quādum dimidium nempe a e , & ex reliquo adhuc maius quādum dimidium nempe e z , hōcque semper fiat tandem relinquiri quandam magnitudinem, quæ minor est quādum c d .

Multiplicetur enim c d , roties donec magnitudo ex ea multiplicatione facta superet magnitudinem a b , sitque magnitudo illa c i , quæ ideo multiplex est ipsius c d , proxime maior quādum a b .

Deinde dividatur c i , in partes ipsi c d , æquales sintque partes illæ c d , d f , f i , detrahaturque ex a b , maius quādum dimidium a e . Atque ex reliqua e b , adhuc maius quādum dimidium e z , illudque fiat donec partes lineæ a b , partibus c i , multitudine sint æquales.

Quoniam igitur c i , maior est quādum a b , & ex c i , ablata est c d , minor quādum eius dimidium vel certè dimidium si c i , ipsi c d , dupla sit: Ex a b , verò ablata est a e , maior quādum eius dimidium erit reliqua d i , reliqua e b , maior. Nam cum c i , maior sit quādum a b , si ex c i , dimidium esset ablatum, & ex a b , dimidium etiam auferetur, non essent reliqua æquales, sed una maior alia existeteret, nimirum reliqua ex c i , maior reliqua ex a b .

Auferens igitur ex c i , minus quādum dimidium vel certè dimidium, & ex a b , maius quādum dimidium erit reliquum ex c i , reliquo ex a b , maius.

Deinde quoniam d i , maior est quādum e b , sitque ablata ex d i , dimidium ipsius d f , vel certè minor dimidio ex e b , ablata sit e z , dimidio maior, erit eodem modo reliqua f i , reliqua z b , maior: Sicque procedendo facile est demonstrare ultimam partem ipsius c i , nempe f i , maiorem esse ultima parte ipsius a b , nempe z b .

Est autem f i , ultima pars rectæ c i , æqualis c d . Igitur recta c d , maior est, quādum z b , ultima pars ipsius a b .

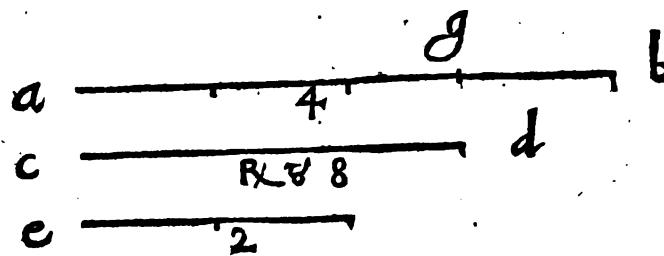
Quare relicta est ea detractione reliqua z b , que minor est quādum c d , quod erat ostendendum.

SCHOLIVM EX CLAVIO.

IVCIE clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, ut non multiplicata, tandem maiorem posset superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monstramus, cùm de angulo concavus contra Iacobum Peletarium ageremus.

Theor. 2. Propos. 2.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore; alterna quadam detractio[n]e, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.



SINT duæ magnitudines inæquales propositæ a b, c d, minor verò c d, Et ex maiore a b, minor c d, detrahatur, & ex reliqua g b, detrahatur adhuc minor c d, si fieri potest. quo facto, si nulla mensura communis præcedentem metiens remanet. Dico magnitudines illas esse prorsus incommensurabiles. Nam si sint commensurabiles habebunt magnitudines illæ aliquam mensuram communem, ut vult i. defin. Sit igitur mensura illa e, vel æqualis, vel minor ipsi c d, detracta autem c d, ex a b, quoties fieri potest relinquitur g b, se minor, Ita ut c d, rectam a g, metiatur.

Deinde detracta g b, ex c d, relinquat h d, se minorem, Ita ut g b, rectam c h, metiatur: Atque hoc semper fiat alterna quadam detractio[n]e: Igitur necessario ea detractio[n]e remanebit quadam magnitudo, minor minore magnitudine proposita, ut constat ex præcedenti propositione, id est ex c d, & a b, remanebit minor quædam magnitudo quam e.

Quoniam verò cum c d, auferatur ex a b, relinquat g b, se minorem, erit a g, ablata, maior quam dimidia ipsius a b, Nam si esset vel dimidia, vel minor, posset adhuc substrahi ex a b.

Pari ratione, erit c h, ablata ex c d, maior, quam dimidia ipsius c d, Nam si esset, &c.

Auferens igitur semper maius, quam dimidium, remanebit tandem quædam magnitudo minor quam e, ut vult antecedens propositio.

Sit igitur recta h d, relicta ex detractio[n]e minor, quam e.

Quoniam igitur e, metitur c d, & c d, metitur a g, metietur quoque e, rectam a g, ut vult 2. pronunciatum lib. huius.

Metitur autem e, totam a b, igitur & reliquam g b, metietur, ut vult 3. pronunciatum.

At g b, metitur c h, quare & e, metietur quoque ipsam c h, ut vult 2. pronunciatum.

Metitur autem e, totam c d, Igitur & reliquam h d, metietur, maior minorem. quod est absurdum. Non igitur a b, c d, aliqua magnitudo metitur, ideo & incommensurabiles.

Si igitur duabus, &c. quod erat ostendendum.

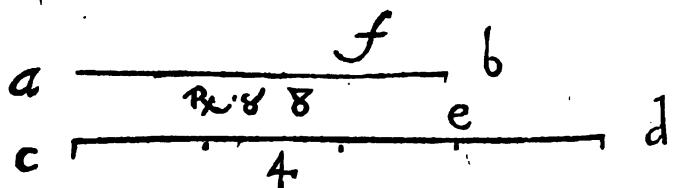
S C H O L I U M E X C L A V I O.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

Si duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractio[n]e: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT

ELEMENTVM DECIMVM.



SINT incommensurabiles magnitudines a b, c d, detrahaturque minor a b, ex c d, et reliqua sit e d, Item e d, ex a b, auferatur, relinquaturque f b, et sic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri precedentem. Si enim fieri potest metiatur f b, praecedentem e d, Quoniam igitur f b, metitur e d, et e d, metitur a f, metietur quoque f b, ipsam a f, metitur autem et seipsum^a. Igitur f b, et totam a b, metietur. Metitur autem a b, ipsam c e^b, Igitur et f b, ipsam c e, metietur. Ponitur autem et f b, metiri ipsam e d^c, Igitur et f b, totam c d, metietur. Ostensa est autem et f b, ipsam a b, metiri. Quare f b, veramque a b, e d, metitur, quod est absurdum, ponuntur enim a b, c d, incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua precedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.

SIMILITER et hoc demonstrabimus.

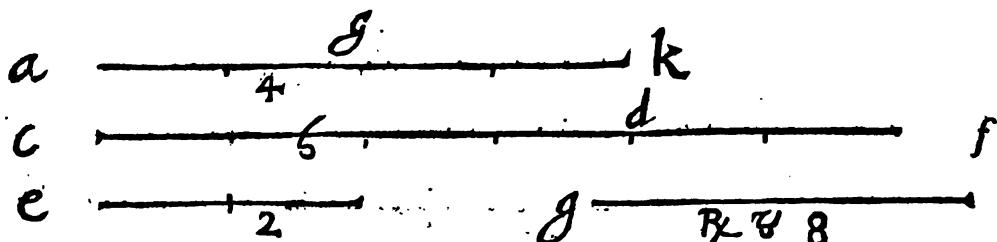
Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione. Metietur quædam reliqua precedentem.

NAM si nunquam reliqua metiretur precedentem, essent propositæ magnitudines incommensurabiles, ut demonstrauit hoc theoremate Euclides, Quod est absurdum, ponuntur enim commensurabiles.

Itaque facile ex his dignoscemus, an duas quacunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractione, si reliqua quæpiam metiatur precedentem erunt magnitudines propositæ commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur veramque magnitudinem propositam, ut constat ex demonstratione primi theoremati huius scholiij. Ex eo enim quod reliqua magnitudo f b, metiri dicebatur precedentem e d, ostensum est eandem reliquam f b, metiri veramque magnitudinem a b, c d, Si vero nunquam reliqua magnitudo precedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, ut Euclides hoc loco demonstrauit.

Probl. I. Propos. 3.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.



SINT due magnitudines commensurabiles propositæ a, c, oportetque inuenire maximam earum communem mensuram, que veramque metiatur.

C

E V C L I D I S

Cum igitur magnitudines illae sint commensurabiles ex hypothesi, si à maiori c, minor a, de-
trahatur, & ex reliqua adhuc minor auferatur, remanebit tandem quadam magnitudo utramque metiens, ut constat ex 2. theoremate Clavi scholi antecedentis, eritque illa g k, vel e.

Nam si nunquam reliqua præcedentem posset metiri, incommensurabiles essent magnitudines illæ, ut constat ex proposit. 2. Quod est absurdum, ponuntur enim commensurabiles. Quod au-
tem sit maxima communis mensura ex sequenti demonstratione colliges.

A L I T E R.

R E P E T I T A priori constructione, auferatur ex maiore c, minor a, sive c d, & ex a,
auferatur d f, quocies fieri potest.

Quoniam enim g k, metitur d f, & d f, metitur a g, metietur quoque g k, ipsam a g, per 2.
pronunciatum lib. huus.

Metitur autem g k, seipsum, quare g k, & totam a k, metietur, ut constat ex 1. pronunciato
lib. huus, atque adeo & ipsam c d, quam a k, metetur, ut vult 2. pronunciatum lib. huus. Cum
ergo & ipsam d f, metiatur, metietur quoque rectam g k, totam c f, per 1. pronunciatum lib. hu-
ius. Metitur quoque g k, utramque a k, c f, quare utriusque a k, c f, communis mensura est
g k, vel e, quod idem est.

Quod autem g k, sit maxima earum magnitudinum communis mensura ita probabimus.

Si g k, non est maxima illa communis mensura, oportet necessario ut alia inueniantur, que sit
illarum magnitudinum maxima mensura, cum ex hypothesi ponantur esse commensurabiles.

Sit igitur g. Erit ideo g, maior recta g k. Quoniam igitur g, ponitur metiri utramque ma-
gnitudinem a k, & f. Metitur autem a k, ipsam c d, cum a k, c d, sint aequales, metietur quoque
g, ipsam c d, per 2. pronunciatum lib. huus.

Metitur autem c f, igitur g, reliquam quoque d f, metietur, per 3. pronunciatum lib. huus.

Metitur autem d f, ipsam a g, igitur & g, rectam a g, metietur ex 2. pronunciato.

Quoniam vero g, totam a k, metitur, metietur quoque g, reliquam g k, maior minorem,
quod est absurdum.

Non igitur maior magnitudo reperitur, que sit maxima mensura earum magnitudinum,
quam g k, vel e.

Quare duabus magnitudinibus, &c. quod erat faciendum.

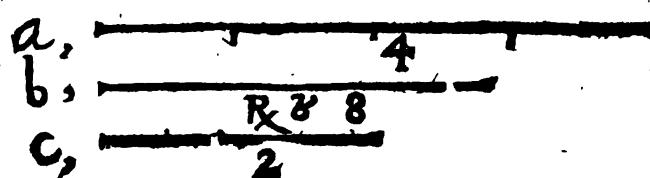
C O R O L L A R I V M E X C L A V I O.

E x hoc manifestum est, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum men-
suram communem.

Elicitur hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est g k, esse maximam mensuram communem
iparum a k, c f. Demonstratum est ibi magnitudinem g, si metiatur magnitudines a k, c f, metiri quoque
maximam mensuram g k. Eademque est ratio de ceteris.

S C H O L I V M E X C L A V I O.

E X his, que dicta sunt, non erit difficile considerare, an quilibet magnitudines propriez sine commensurabiles esse ne.

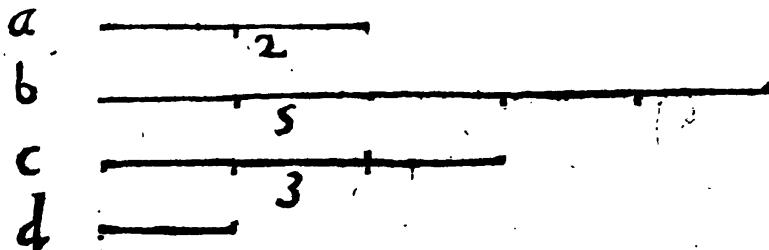


ELEMENTVM DECIMVM.

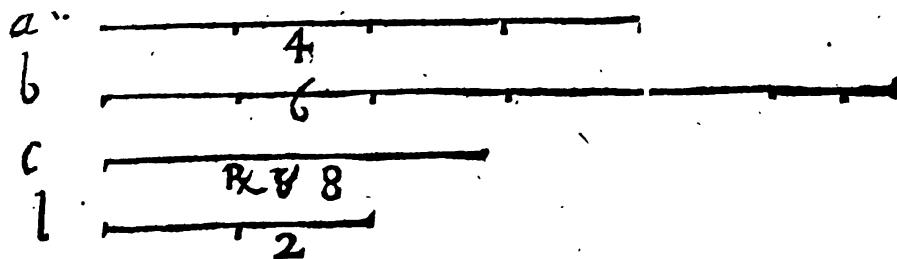
ii

SINT enim tres magnitudines a, b, c . Primum experior per ea, que ad propos. 2. huius lib. docuimus, an due a , & b , commensurabiles sint, an non. Que si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres a, b, c , esse incommensurabiles, quod nullam habere possit communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines a , & b .

Si vero a , & b , fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inuenita d , que si metietur quoque magnitudinem c , manifestum est, tres magnitudines a, b, c , commensurabiles esse cum habeant communem mensuram d .

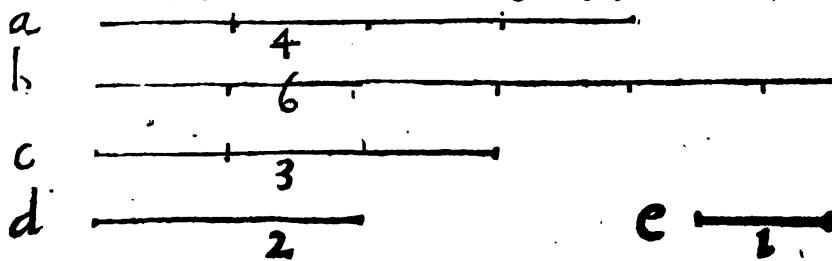


QVOD si d , maxima mensura magnitudinum a , & b , non metietur c , erunt c , & d , vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres a, b, c , incommensurabiles. Si enim credentes esse commensurabiles metietur earum maxima communis mensura ipsam d , maximam mensuram magnitudinum a , & b , per corollarium propos.



CVM ergo eadem illa mensura metietur quoque c , non erunt c , & d , incommensurabiles. Quid est contra hypothesis?

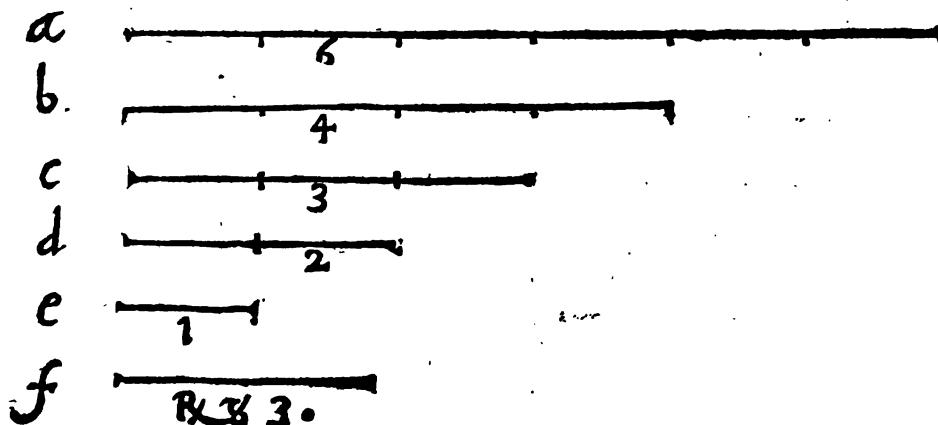
SI vero c , & d , sunt commensurabiles, erunt quoque tres a, b, c , commensurabiles. Inuenita enim c , maxima mensura ipsarum $\frac{3}{5}$, decimorum c , & d , cum c , metietur d , & d , ipsas a , & b , metietur quoque c , ipsas a , & b . Quare cum eadem c , metietur quoque c , metietur quoque c , proprieatis, tres magnitudines a, b, c . Ac proprieas commensurabiles sunt. Quid est proposicium.



SIMILITER explorabimus, an plures datae magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si duas finitimas experiemur id primum in tribus, si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perspiciemus, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

Probl. 2. Propos. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.



E V C L I D I S

SINT tres magnitudines propositae commensurabiles a, b, c , oportet atque maximam harum inuenire communem mensuram. Sitque d , maxima earum $a, \text{et } b$, mensura communis inuenta. Igitur si d , tertiam c , metitur, factum est, quod petitur, ac proinde d , erit harum trium a, b, c , maxima mensura communis.

Si enim aliqua magnitudo maior, quam d , inueniatur, que metiri possit magnitudines a, b, c , metietur eadem per corollarium Clavi propositione 3. lib. huius maximam mensuram ipsarum; nemirum ipsam d , maior minorem; quod est impossibile.

Si vero d , non metiatur c , erunt nihilominus d et c , inter se commensurabiles.

Cum autem a, b, c , sint commensurabiles, metietur mensura qualibet earum communis ipsam d , maximam mensuram ipsarum $a, \text{et } b$, per coroll. praecedentis propositionis.

Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque ipsam c , erunt $d, \text{et } c$, commensurabiles.

Sit ergo e , maxima mensura earum: Dico e , maximam esse mensuram communem harum a, b, c . Quod verum esse sic probabimus.

Quoniam e , metitur $d, \text{et } c, \text{et } d$, metietur $a, \text{et } b$, metietur quoque e , ipsas $a, \text{et } b$, metietur autem et ipsam c . Igitur e , maxima mensura est communis ipsarum a, b, c , quemadmodum diximus.

Si enim e , non est maxima communis mensura, Reperiatur alia communis mensura, Sitque illa f , si fieri potest: Quoniam igitur f , metitur $a, \text{et } b$, metietur quoque et earum maximam mensuram communem d , per coroll. Clavi antecedentis propositionis, metietur autem et c . Igitur f , metiens $d, \text{et } c$, metietur quoque et earum maximam mensuram communem e , ex corollario eodem, Maior minorem, quod absurdum.

Non igitur maior magnitudo, quam e , magnitudines propositas a, b, c , metietur, Ac propterea e , maxima est earum mensura communis.

Quare tribus magnitudinibus, et c , quod erat faciendum.

C O R O L L A R I V M E X C L A V I O.

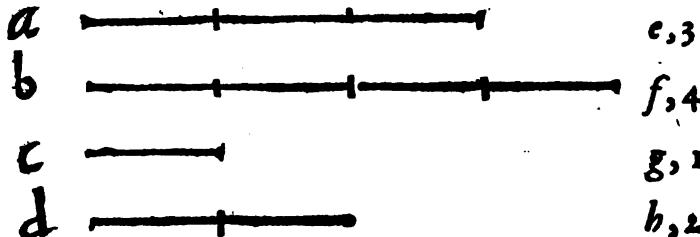
A P E R T E quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metietur quoque maximam earum mensuram communem.

Infertur autem hoc ex ultima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem f , si metiatur ipsas a, b, c , metiri quoque e , maximam illarum communem mensuram. Eademque de ceteris est ratio. Simili modo pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus, locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si datae magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium magnitudinum. Si quinque accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua vero omnia absoluenda erunt, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

L E M M A E X C L A V I O.

S I fint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines a, b, c, d , in eisdem rationibus, in quibus totidem numeri e, f, g, h , ut quidem $a, ad b$, ita $e, ad f$, & ut $b, ad c$, ita $f, ad g$, & ut $c, ad d$, ita $g, ad h$,

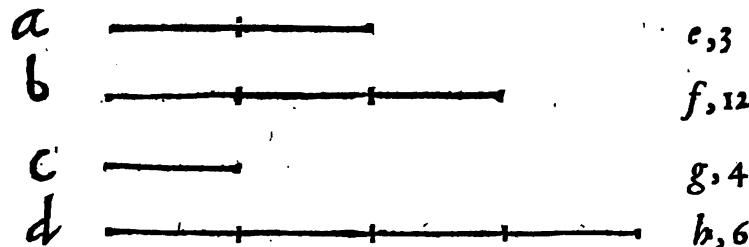


ELEMENTVM DECIMVM.

13

DICO ex equo esse, ut a , ad d , ita e , ad b . Quoniam enim ex iis, que ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonstrata sunt, tam proportio a , ad d , componitur ex proportionibus a , ad b , b , ad c , & c , ad d , quām proportio e , ad b , ex proportionibus e , ad f , f , ad g , & g ad b , perspicuum est, cūm proportiones componentes proportionem a , ad d , aquales ponantur proportionibus, qua proportionem e , ad b , componunt, & compositas proportiones, nempe a , ad d , & e , ad b , aquales esse, hoc est, esse ut a , ad d , ita e , ad b , quod est proportionum.

Idem sequitur, si magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata,



Vt in hoc exemplo appareret, in quo est, ut a , ad b , ita g , ad h , & vt b , ad c , ita f , ad g , & vt c , ad d , ita e , ad f . Eadem enim prorsus est demonstratio.

SCHOLIVM EX CLAVIO.

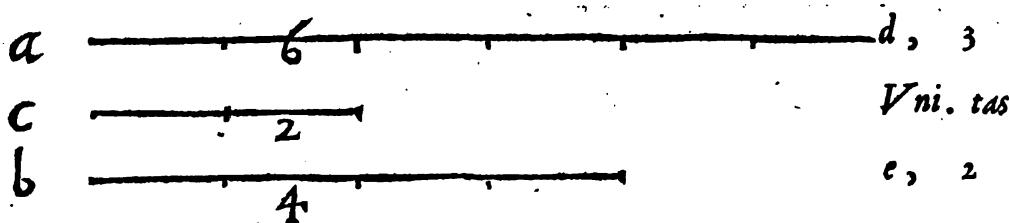
QVONIAM praecedenti lemma, & in propositione, que sequitur, & in aliis multis, vtendum nobis erit, placuisse illud hoc loco breviter demonstrare, cūm non facile videatur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo, & numerus diuersa genera quantitatis constituant. At proportio ex aequalitate in praecedentibus libris ostensa tantum est in quantitatibus eiusdem generis. In numeris quidem lib. 7. libro vero 5. in magnitudinibus: quācum demonstratio in quinto libro facta, etiam ad hoc lemma transferri posset, cūm omnes demonstrationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certè demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemma congruet, cūm magnitudines a, b, c, d , que proportiones habent easdem, quas numeri e, f, g, h , rationem induant numerorum.

Theor. 3. Propos. 5.

COMENSURABILES magnitudines inter se rationem habent, quām numerus ad numerum.

SINT proposita magnitudines commensurabiles a , & b . Dico eas habere adiuicem rationem eandem, quam aliquis numerus habet ad alium numerum.

Reperiatur earum maxima mensura communis per ea, que docuimus ad propos. 3. lib. huic. Sitque c , & quoties c , metitur a , toties vñitas numerum d , metiatur, & quoties eadem c , magnitudinem b , metitur, toties vñitas numerum e , metiatur.



IGITVR quia magnitudo c , magnitudinem a , & vñitas numerum d , aq̄ē metitur, & qualiter magnitudo a , magnitudinem c , atque numerus d , vñitatem continebit.

Quocirca erit vt a , ad c , ita numerus d , ad vñitatem: Est autem vt c , ad b , ita vñitas ad numerum e , quod c , ipsam b , atque vñitas numerum e , aq̄ē metiatur.

Igitur ex lemmate Clavi antecedentis propos. erit ex equo, vt a , magnitudo, ad b , magnitudinem. Ita numerus d , ad numerum e .

Igitur commensurabiles magnitudines rationem, & c. Quod erat demonstrandum.

D

E V C L I D I S

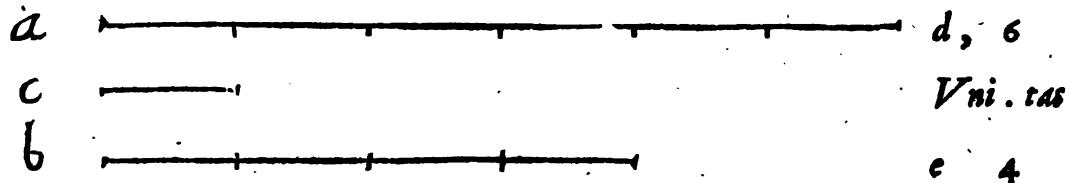
S C H O L I V M E X C L A V I O.

C V M Euclides ad demonstrationem huius theorematis assumat, maximam communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit e, ipsarum a, & b, perficuum est, lineas debere esse longitudine, & ob id potentia quoque commensurabiles, ut rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Hæ enim sola communem recipiunt mensuram, sequæ adeò in eis demonstratio locum habet. Quod si linea sine potentia tantum commensurabiles, habebunt quidem earam quadrata inter se rationem, quam numerus ad numerum, quia commensurabiles sunt, atque idcirco mensuram habent communem, ipsique demonstratio huius theorematis conuenit: At ipsa linea nequaquam, quia longitudine incommensurabiles cum sine, communis mensura sunt expertes, ac propterea huius theorematis demonstratio in ipsis conuenire nullo modo potest.

Ex demonstratione porr̄ eiudem huius theorematis liquido constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos earum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere proportionem magnitudines a, & b, quam habent numeri d, & e, per quos scilicet earum mensura communis maxima e, ipsas metitur.

Vnde si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus a, & b, libeat invenire, quam proportionem habeant in numeris: sumendi erunt duo numeri d, & e, quos unitas eque, ac communis magnitudinum commensurabilium a, & b, mensura maxima e, ipsas magnitudines metitur. Nam vt demonstratum est, magnitudines a, & b, proportionem habent, quam numeri d, & e.

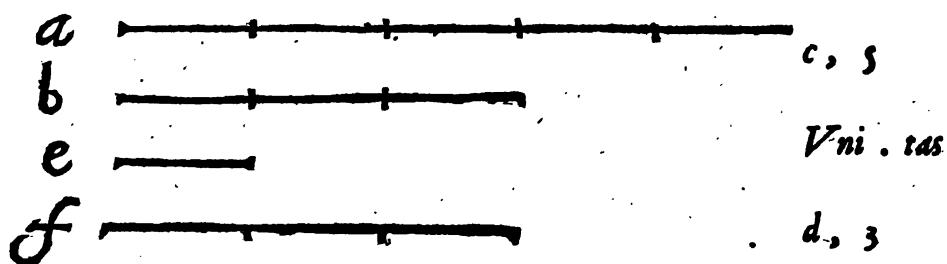
Quod si loco maxime mensure e, sumamus aliam quamcumque communem earum mensuram, nihilominus hoc theorema demonstrabimus eodem argumento.



Q V A M V I S enim numeri d, & e, maiores inueniantur in hac posteriori demonstratione, quam in priori: habente tamen eandem proportionem cum illis, ut ex apposita figura appareat. Quoniam vero in priori demonstratione numeri inueniti sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium, propterea fortassis Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpit, & non quilibet, licet id necessarium non sit.

Theor. 4. Propos. 6.

S i duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines.



H A B E A N T duæ magnitudines a, & b, rationem numerorum c, d, **Dico** magnitudines a, b, inter se commensurabiles esse.

Quoties enim numerus c, ab unitate metitur, in tot partes æquales diuidatur magnitudo a, unique earum partium æqualis sit magnitudo e, & quoties eadem unitas numerum d, meretur, toties magnitudo e, meretur magnitudinem f.

Igitur cum magnitudo e, æque in magnitudine a, contineatur, quoties unitas in numero c, continetur, continebit æqualiter magnitudo a, magnitudinem e, toties quoties à numero c, unitas continetur.

Erit igitur magnitudo a, ad magnitudinem e, ut numerus c, ad unitatem: est autem ut e, ad f, ita unitas ad d, quod magnitudo e, æque meretur magnitudinem f, ut unitas numerum d, Quare ex lemmate Clavi propos. 4. lib. huius, erit ex æqualitate, ut magnitudo a, ad magnitudinem

ELEMENTVM DECIMVM.

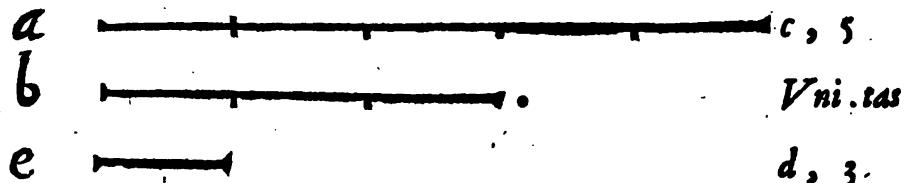
15

f, ita numerus *c*, ad numerum *d*. Erat autem etiam ut numerus *c*, ad numerum *d*, ita magnitudo *a*, ad magnitudinem *b*, ita eadem *a*, ad magnitudinem *f*, igitur magnitudines *b*, & *f*, aequales sunt ut vult 9. propos. lib. quinti.

Cum autem magnitudo *f*, à magnitudine *e*, metiatur, metietur quoque magnitudo *b*, à magnitudine *e*. Metiebatur autem *c*, magnitudinem *a*.

Quare cum magnitudines *a*, & *b*, à magnitudine *e*, metiantur, erunt magnitudines *a*, & *b*, inter se commensurabiles.

Si duæ magnitudines igitur, & c. Quod erat ostendendum.



ALITER.

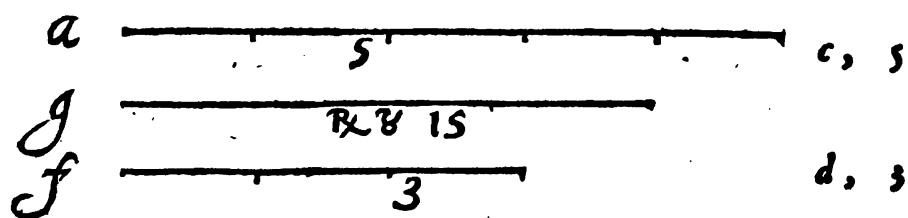
SIT magnitudo *a*, diuisa in tot partes aequales, quot unitates sunt contentæ in numero *c*, quarum partium vni sit aequalis *e*. Sitque etiam magnitudo *b*, diuisa in tot partes aequales, quot sunt unitates in numero *d*. Quoniam igitur est ut magnitudo *e*, ad magnitudinem *a*, ita unitas ad numerum *c*, nam ex hypothesi aequæ magnitudo *e*, magnitudinem *a*, metitur, sicut unitas numerum *c*. Atque ex constructione ponitur esse ut *a*, ad *b*, ita *c*, ad *d*, igitur per lemma Clavi proposit. 4. erit ex aequo, ut *e*, ad *b*, ita unitas ad *d*. Metitur autem unitas numerum *d*, igitur & magnitudo *e*, magnitudinem *b*, metitur. Metitur autem *c*, ipsam quoque *a*; igitur *a*, & *b*, habentes eandem communem mensuram *e*, ac propterea commensurabiles per 1. defin. lib. huius.

Quare si duæ magnitudines, & c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM EX CLAVIO.

Ex priori autem demonstratione theorematis aperta est nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quævis alia data recta linea, ut numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data *a*, ut numerus *c*, ad numerum *d*, diuenda erit linea *a*, in tot aequales partes, quot unitates sunt in *c*, & sumenda alia linea *f*, tot earumdem partium, quot unitates sunt in *d*. Hoc enim si fiat, erit *a*, ad *f*, ut *c*, ad *d*, ut demonstratum est.

Hinc rursus apparet, quānam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, ut numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineæ datæ *a*, ut numerus *c*, ad numerum *d*.



INVENIENDA erit primum linea *f*, ex iis, quæ modo diximus, ad quam sic se habeat *a*, ut *c*, ad *d*. Deinde de accipienda inter *a*, & *f*, media proportionalis *g*. Erit enim quadratum ex *a*, ad quadratum ex *g*, ut *c*, numerus ad numerum *d*. Cum enim tres rectæ *a*, *g*, *f*, sint continuæ proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut *a*, ad *f*, atque adeò ut numerus *c*, ad numerum *d*, cum sit ut *a*, ad *f*, ita *c*, ad *d*. Sic quadratum ex *a*, ad quadratum ex *g*, cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.

SCHOLIVM EX CLAVIO.

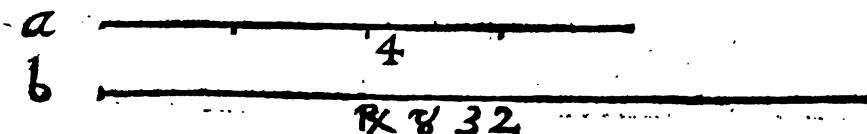
IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse

EV CLIDI S

longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, ut ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines a, & b, mensuram communem e, habere demonstratum est.

Theor. 5. Propos. 7.

IN COMMENSURABILIS magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.



SINT proposita magnitudines incommensurabiles a, & b, Dico eas non habere rationem numeri ad numerum. Nam si haberent rationem numerorum, inter se essent commensurabiles, contra hypothesin. ponuntur enim incommensurabiles.

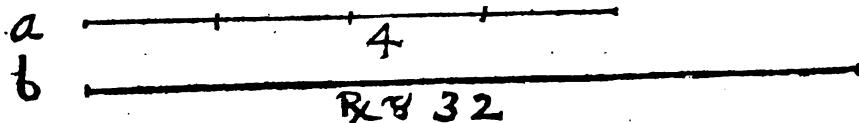
Quare a, & b, que magnitudines sunt incommensurabiles, non habent inter se rationem, quam numerus ad numerum. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

QVOCVN QVE modo linea incommensurabiles sint, sive longitudine & potentia, sive longitudine tantum, semper colliguntur, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, ut rule theorema. Nam alias ut demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

Theor. 6. Propos. 8

Si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.



NON habent magnitudines a, & b, rationem inter se numeri ad numerum. Dico eas esse incommensurabiles. Nam si essent commensurabiles, haberent rationem numerorum. Quod est contra hypothesin ponuntur enim non habere.

Quare si duæ magnitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

QVOD si linea proportionem non habeant, quam numerus ad numerum erunt ipsa necessaria, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles: alsoquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, ut ad propos. 5. bius lib. demonstratus. quod est contra hypothesin. Non autem collendum est ex hoc theoremate, lineas, que proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessaria potentia incommensurabiles esse, ut manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, ut in demonstratione theorematis assumitur; immo nullo modo talam proportionem habere possunt, ut in scolio propos. 5. bius lib. docimus. Solam igitur inferit ex huius theorematis demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

Si sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoque proportionales, sitque ut prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam. Erit & ut prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

SINT

ELEMENTVM DECIMVM.

17

SINT continuè proportionales tām quantitates a, b, c, quām d, e, f, siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non:

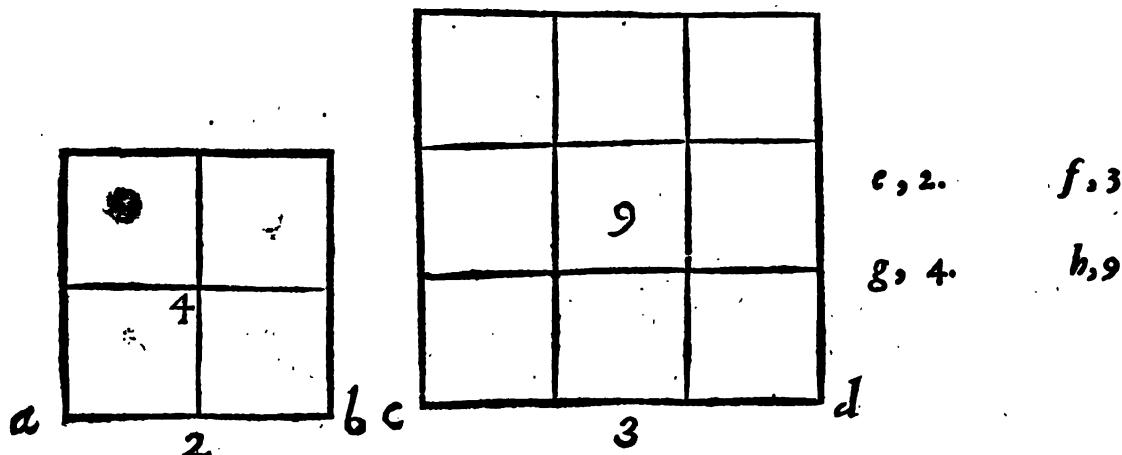
a	—	49	d,	49
b	—	42	e,	42
c	—	36	f,	36

Sitque ut a, ad c, ita d, ad f. Dico quoque esse ut a, ad b, ita d, ad e. Quoniam enim tām proportio a, ad c, proportionis a, ad b, quām proportio d, ad f, proportionis d, ad e, duplicata est, ponanturque proportiones a, ad c, & d, ad f, aquales: erunt quoque proportiones a, ad b, & d, ad e, aquales; quandoquidem eorum proportiones duplicate, aquales sunt.

Idem sequitur, si plures quantitates sint, quām tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicate, ad demonstrationem: & in quinque quadruplicatam, &c.

Theor. 7. Propos. 9.

Quæ à rectis lincis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lincis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.



SINT rectæ a b, & c d, longitudine commensurabiles. Dico quadrata ab illis descripta, inter se rationem habere numeri quadrati ad numerum quadratum. Nam cum rectæ a b, & c d, sint commensurabiles longitudine, habebunt inter se rationem, quam numerus ad numerum, ut vult s. propos. lib. huic. Sitque ea ratio, qua numeri e, ad numerum f, quadrati etiam ipsorum sint g, & h.

Igitur quia est a b, ad c d, ut e, numerus ad numerum f, habet autem quadratum ex a b, ad quadratum ex c d, duplicatam proportionem lateris a b, ad latus c d, ut constat ex 20. sexti.

Numerusque quadratus g, habet ad numerum quadratum h, duplicatam etiam proportionem lateris e, ad latus f, Erit eadem proportio quadrati ex a b, ad quadratum ex c d, que numeri quadrati g, ad quadratum numerum h, quia ambæ hæ proportiones sunt duplicate propor-

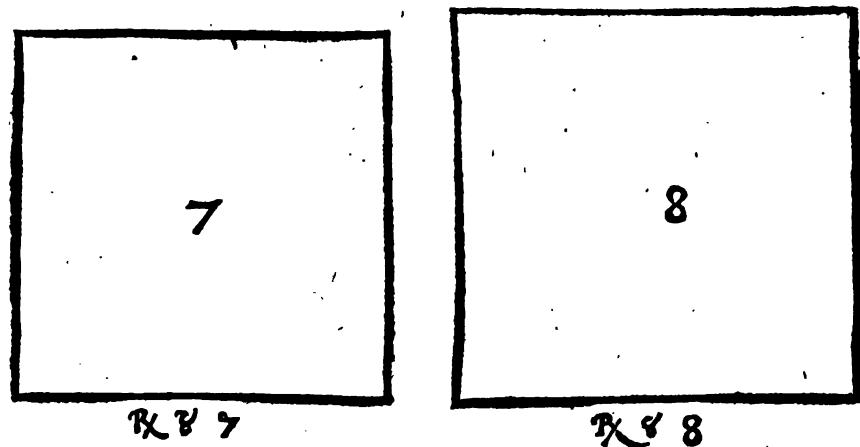
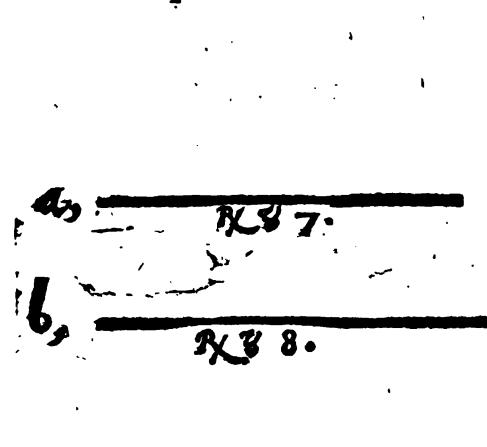
E

tionum aequalium. Quod primum erat ostendendum.

Rursus si quadratum ex a b, ad quadratum ex c d, ut numerus quadratus g, ad quadratum numerum h, Dico rectas a b, et c d, esse longitudine commensurabiles, Sunt enim numeri e, et f, latera numerorum quadratorum g, et h, Quoniam igitur quadratum a b, ad quadratum ex c d, est ut numerus quadratus g, ad quadratum numerum h. Habet autem quadratum ex a b, ad quadratum ex c d, duplicatam proportionem lateris a b, ad latus c d, Numerusque quadratus g, eandem duplicatam proportionem habet ad quadratum numerum h, lateris e, ad latus f, Eadem erit proportio lateris quadrati a b, ad latus quadrati c d, qua lateris numeri e, ad latus numeri f, Harum enim proportionum proportiones duplicatae, aequales sunt.

Igitur cum rectae a b, c d, inter se proportionem habeant, quam numeri e, et f, ipsae erunt longitudine commensurabiles. Quod iterum erat ostendendum.

Deinde sint rectae a b, incommensurabiles longitudine. Dico earum quadrata non habere inter se rationem numeri quadrati, ad numerum quadratum. Nam si haberent rationem numerorum quadratorum, essent longitudine commensurabiles, quod est absurdum, ponuntur enim incommensurabiles. Quare quadrata ex a, et b, descripta non habent rationem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.



POSTREM O non habeat quadratum ex a, ad quadratum ex b, eandem rationem, quam numerus quadratus, ad numerum quadratum. Dico eas esse longitudine incommensurabiles. Si enim commensurabiles essent longitudine, haberent earum quadrata rationem numerorum quadratorum, quod est contra hypothesin, ponuntur enim non habere. Igitur a, et b, minime sunt longitudine commensurabiles.

Quocirca qua à rectis longitudine commensurabilibus, et c. Quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I V M E X C L A V I O.

E x his manifestum est, rectas lineas qua longitude sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse. Qua vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et qua longitude incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles. Qua vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

Quoniam enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in hoc theoremate demonstratum est, hoc est simpliciter quam numerus ad numerum: ipsa commensurabilia erunt. Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent: Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.

Deinde quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen quam numerus simpliciter ad numerum, potentia quidem commensurabiles sunt, cum earum quadrata commensurabilia sint: At longitudine nequam, ut in hoc theoremate est

ostensum; perspicuum est, lineas, potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim ea lineae potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, ut constat ex secunda parte huius theorematis.

Rursus quia lineae, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, ut modo diximus, liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse, solum enim ea lineae longitudine incommensurabiles, quam quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, potentia quoque incommensurabiles sunt, cum earum quadrata incommensurabilia sint.

Postremo lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, ut patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam obrem linea potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

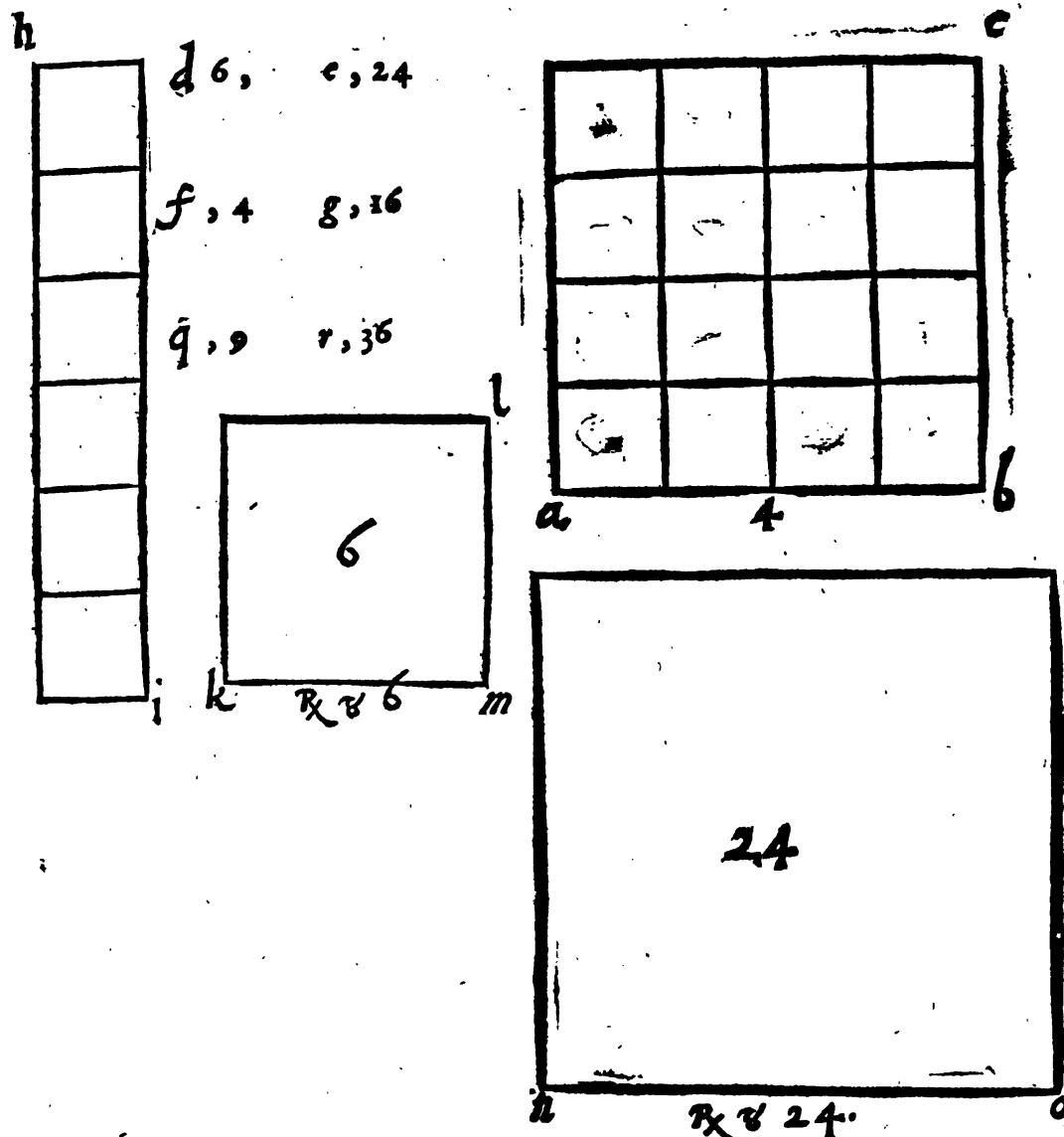
SCHOLIVM EX CLAVIO.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusque percipiatur, diligenter consideranda sunt haec, que sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadratus, ex prima parte theorematis proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, que numeris exprimi possunt, si cum linea Rationalis proposita comparentur: quales sunt ille, que in demonstratione sunt posita; (est enim recta a b, c d, e.) Verum etiam illas, que nullis possunt numeris effiri, si cum Rationalis linea proposita conferantur: Deinde est contrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineae, seu latera ex secunda theoremati parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, que continent rotidem quadratas mensuras aquales illis, in quibus quadratum Rationalis linea resolutur, quot sunt unitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta; (continet enim quadratum ex a b, quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex c d, novem; quot nimis unitates sunt in quadratis numeris g. h.) Sed etiam, que vel pauciores, vel plures mensuras quadratas completuntur, quam sunt unitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato linea Rationalis conferantur. Sepenumero enim linea data commensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationalis linea proposita sunt longitudine incommensurabiles. Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in hoc theoremate est ostensum, ut pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadratis illis numeris unitates. Hac autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

Exponatur linea Rationalis a b, expressa numero 4. cuius quadratum a c, continebit mensuras quadratas 16. Sunt quoque numeri d, e, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, ut in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus numerus f, ad quadratum numerum g, nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangle b i, constans ex sex quadratis mensuris quadratis a c, quot nimis unitates in d, numero continentur, atque ipsi b i, quadratum aequale constitutur k l, cuius latens k m, Postrem per ea, que in coroll. propos. 6. huius libri ostendimus, inueniatur recta n o, ad cuius quadratum n p, ita se habeat k l, quadratum recta k m, ut numerus d, ad numerum e, vel ut quadratus f, ad quadratum g. Quoniam igitur est ut quadratus numerus f, ad quadratum numerum g, vel ut numerus d, ad numerum e, videlicet 6. ad 24. ita quadratum k l, ad quadratum n p, per constructionem, contineat autem quadratum k l, 6. mensuras quadratas, qualium 16. contineat quadratum Rationale a c; (constructionem enim est quadratum k l, aequale rectangle b i, constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris) continebit quadratum n p, earundem mensurarum quadratarum 24. ac propterea k m, n o, latera quadratorum k l, n p, evantur 6. & 24. que numeris exprimi nequeunt, cum 6. & 24. non sint numeri quadrati, erintque linea Rationalis a b, longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabiles longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus f, ad quadratum numerum g. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata k l, n p, proportionem habent, ex corollario propos. 20. lib. 6. duplicata laterum k m, n o, sit autem quadratorum proportio subquadpla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum subdupla videlicet 1. ad 2. Huius enim illius duplicata est, ut hic apparet 1. 2. 4. Quare longitudo commensurabiles sunt recta k m, n o, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligenda sunt ergo in hoc theoremate linea etiam illa, longitudine commensurabiles, que numeris non possunt exprimi, si cum linea Rationalis comparentur. Quod si considerentur eadem linea k m, n o, simpliciter, & absolute, nulla habita ratione linea Rationalis a b, numeris poterunt effiri. Cum enim proportionem habeant subduplicam, si k m, dividatur in duas partes aequales, dividetur n o, in eiusdem magnitudinis partes 4. si illa in 3. secabitur hac in 6. & c. At vero haec partes nullo modo aequales sunt partibus linea Rationalis a b, immo illis omnino sunt longitudine incommensurabiles, ut diximus.

Rursus quia quadrata k l, n p, proportionem habentia, quam quadratus numerus f, ad quadratum numerum g, plures quadratas mensuras continent aquales illis, in quibus a c, quadratum Rationalis linea a b, resolutur, quam unitates sunt in dictis numeris quadratis f, g. (Nam k l, aequale est sex huiusmodi mensuris, & n p, continet 24. At numerus quadratus f, componitur ex quatuor unitatibus, & g. ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem proportione sumantur q r, pauciores tales mensuras complectuntur quadrata k l, n p, quam sunt unitates in numeris quadratis q r, cum alter ex 9. alter vero ex 36. unitatibus constituantur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoque esse quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, que pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quam unitates in illis quadratis numeris reperiuntur; si ea conferantur cum quadrato linea Rationalis proposita. Quod si eadem quadrata k l, n p, considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati a c, ex Rationalis linea a b, descripti, resoluti poterunt in rotidem mensuras quadra-

4. defin.
8. decim.



tas, quot unitates in quadratis numeris f,g, vel q,r, continentur. Nam si recta k m, dividatur in duas partes, & n o, in quatuor, ut dictum est, continebit quadratum k l, quatuor mensuras quadratas, & quadratum n p, sexdecim quo scilicet unitates reperiuntur in quadratis numeris f,g. Item si eadem linea secetur in partes tres, & sex, habebunt earum quadrata mensuras quadratas 9, & 36, quo numerum unitates comprehenduntur in numeris quadratis q,r, & c. At huiusmodi mensura nullo modo a quales sunt quadratus mensuras, in quas quadratum a c, Rationalis linea a b, resolutur.

Idem dicemus de omnibus aliis quadratis, coramque lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12, & 3, habentes proportionem, quam quadratus numerus 16, ad quadratum numerum 4. &c.

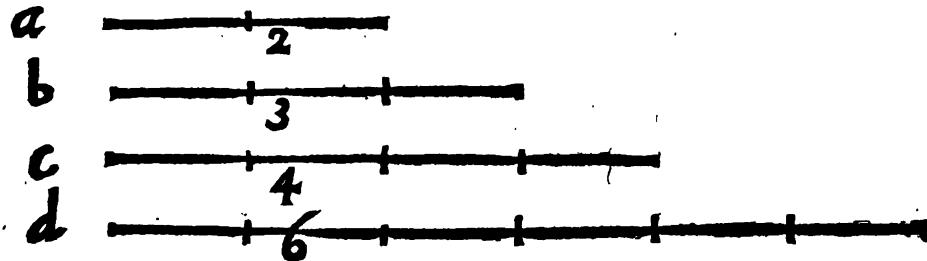
Itaque theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamvis interdum Rationalis linea incommensurabiles sint, ut sit sensus: Quadrata, que describuntur a rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles linea Rationalis proposita, proportionem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamvis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis linea confrangerentur, se numero numeris quadratis nullo modo possint exprimi. Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, siue bac quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato Rationalis linea, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia etiam si linea Rationali sine longitudine incommensurabilia, &c.

Colligit Campanus ex hoc theoremati, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, ut ad propos. 47. lib. I. demonstramus. Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, que quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius casus proportionalis, ut in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus. Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex ultima parte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latere in uno eodemque quadrato, longitudine, inter se sunt incommensurabiles. Hoc etiam nos demonstravimus in scholio propos. 7. lib. 8. Quod tamen clarius ostendit Euclides propos. ultima huius libri.

Theor.

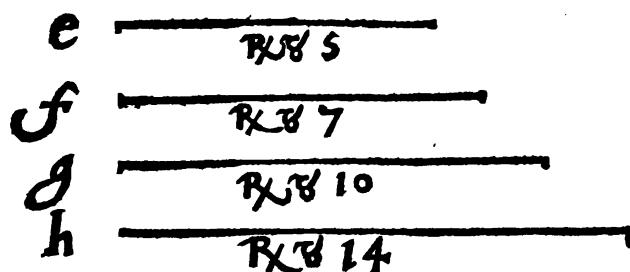
Theor. 8. Propos. 10.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima verò secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis, & tertia quartæ incommensurabilis erit.



SINT quatuor magnitudines proportionales a, b, c, d . Si que prima a , secunda b , commensurabilis. Dico et^r tertiam c , quartæ d , esse commensurabilem. Quoniam enim a , et^r b , inter se sunt commensurabiles, habebunt earum quadrata rationem, quam quadratus numerus habet ad numerum quadratum, ut constat ex prima parte propos. antecedentis, nimirum ut 4, ad 9. Igitur et^r quadrata ex c , et^r d , habebunt etiam rationem, quam numerus quadratus habet ad numerum quadratum, ponitur enim esse, ut a , ad b , ita c , ad d . Quare et^r c d , sunt longitudine commensurabiles.

Rursus sint aliae quatuor magnitudines inter se proportionales si que prima c , ad secundam f , incommensurabilis.



DICO et^r tertiam g , quartæ h , esse incommensurabilem. Cum enim e , et^r f , sint incommensurabiles, non habebunt earum quadrata rationem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ut constat ex tercia parte theoremaris antecedentis. Ponitur autem esse, ut e , ad f , sic g , ad h . Igitur quadrata ex g , et^r h descripta rationem quadratorum numerorum non habebunt. Quare g , et^r h , sunt longitudine incommensurabiles. Si igitur quatuor, et^r c . Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

QVOD si quatuor propositiones magnitudines fuerint linea, prima autem secunda commensurabilis fuerit longitudine, erit et^r tertia quartæ longitudine commensurabilis, ut ex demonstratione huius theoremaris apparet. Eodem enim modo ostendemus posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare ut in scholio propos. huius lib. diximus longitudine commensurabiles sunt. Si autem prima secunda fuerit commensurabilis potentia tantum erit et^r tertia quartæ potentia tantum commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur a , commensurabilis est potentia ipsi b , erunt earum quadrata commensurabilia, ac propterea proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Est autem ut quadratum ex a , ad quadratum ex b , ita quadratum ex c , ad quadratum ex d . (Quod quatuor lineæ propositione a, b, c, d , proportionales sunt, et earum quadrata figura similes similiterque descriptæ.) Igitur et^r quadrata ex c d , proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Quare commensurabilia erunt, ac propterea lineæ c d , proportionales sunt. Quod autem potentia tantum sunt commensurabiles, ita est defin.

F

E V C L I D I S

manifestum fiet. Quoniam recte a b, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt: non erit earum proportio, que numeri ad numerum, ut in scholio propos. 7. huius libri docuimus. Ac propterea neque c d, proportiones habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt c d, ex scholio propos. 8. huius libri. Sunt autem potentia commensurabiles, ut ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositum.

Eadem ratione si prima secunda sit incommensurabilis longitudine tantum, erit et tertia quarta longitudine tantum incommensurabiles. Nam si a, et b, sint longitudine tantum incommensurabiles, erunt ipsarum potentiae commensurabiles, ac propterea ipsae potentiae tantum commensurabiles erunt. Igitur ut nunc ostendimus, erunt quoque recte c d, potentiae tantum commensurabiles; ac idcirco longitudine tantum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

Rerius si quatuor magnitudinum priores due fuerint linea, duæ vero relique superficies, vel solidæ: Sequetur nihilominus si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, et reliquas duas magnitudines ommensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ sint longitudine commensurabiles, erit earum proportio, que numeri ad numerum exciis, que in scholio propos. 5. huius libri docuimus. Cum ergo habeant reliqua duæ magnitudines proportionem eandem, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, que numeri ad numerum, atque adeò commensurabiles erunt. Si vero lineæ longitudine incommensurabiles sint, siue potentiae commensurabiles existant, siue non, non erit earum proportio, que numeri ad numerum, ut constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium proportio erit, que numeri ad numerum. Quare incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

Eodem modo si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solidæ, posteriores vero duæ lineæ, demonstrabimus, si planæ, vel solidæ commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineæ longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim planæ, solidæ commensurabilia sint, habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur et linea eandem cum illis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum, ac propterea longitudine commensurabiles erunt, ut dicimus in scholio propos. 6. huius lib. Si vero planæ, vel solidæ sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt, per ea, que docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum.

L E M M A E X C L A V I O.

Duos numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

I N V E N I A N T V R duo plani numeri non similes, per ea, que ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus, ad quadratum numerum ut in scholio propos. 26. lib. 8. demonstravimus. Quod est propositum.

Quod si plures numeros inuenire velimur, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quotunque numeros primos, per ea, que in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus, a, b, c, d, e.

a, 3. b, 5. c, 7. d, 11. e, 13.

N V L L I enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, ut ad finem lib. 8. docuimus.

S C H O L I V M E X C L A V I O.

P O R R O inventionem numerorum planorum non similium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non recte quidan tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est federicus Commandinus. Quod ut ostendamus adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

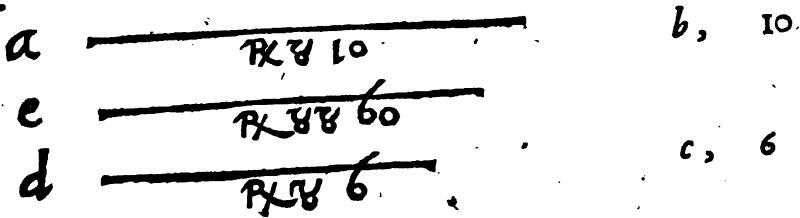
Exponantur quatuor numeri a, b, c, d, ita ut non sit sicut a, ad c, ita b, ad d. Et fiat ex a, b, numerus e. Et ex c, d, numerus f. Perspicuum igitur est e, f, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia non sunt, quod facere oportebat.

a, 2.	c, 3.
b, 6.	d, 16.
e, 12.	f, 48.

Hac est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia scilicet numero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Non numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12, et 48. sunt plani similes, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4, et 16. Itēque prior numerus latera habeat 3, et 4, proportionalia lateribus posterioris 6, et 8. ut constat; quamvis latera prioris ab illis assumpta 2, et 6, non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis, 3, et 16. Satis enim est, ut duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera eiusdem proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, ut quecumque duo latera eiusdem proportionalia sint quibuscumque duobus lateribus alterius, quia de re plura scripsimus in definit. 22. lib. 7, et in scholio propos. 23. lib. 8.

Probl. 3. Propos. II.

PROPOSITA rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.



SIT recta linea proposita a , cui sit inuenienda alia linea ei incommensurabilis longitudine tantum. Quod ut adimplatur, reperiantur primò duo numeri b , & c , non habentes inter se proportionem numerorum quadratorum, illudque per ea, que Clavius docuit lemmate antecedentis propositionis. Deinde ex corollario Clavius propos. 6. huius lib. inueniatur linea d , ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex a , ut numerus b , ad numerum c , id est ut 10. ad 6. Dico rectam d , esse ipsi a , tantum longitudine incommensurabilem. Quod sic probo. Quadratum ex a , ad quadratum ex d , sic se habet ut numerus b , ad numerum c , id est ut 10. ad 6. proportio autem 10. ad 6. non est eadem, qua numeri quadrati ad quadratum numerum. Igitur nec quadratum ex a , ad quadratum ex d , rationem habet numerorum quadratorum. Atque adeò rectæ a , & d , longitudine incommensurabiles per 9. propos. lib. huius. Quod autem longitudine tantum sunt incommensurabiles sic ostenditur: Quoniam quadrata ex a , & d , rationem habent numerorum 10, & 6, ut iam fuit demonstratum, erunt rectæ a , & d , potentia commensurabiles, ut patet ex 6. defin. lib. huius: longitudine igitur tantum sunt incommensurabiles a , & d , quod est primum.

Rursus inuenienda sit alia, rectæ propositæ a , longitudine, & potentia incommensurabilis. Samatur media proportionalis e , inter rectas a , & d . Dico rectam e , ipsi a , esse veroque modo incommensurabilem. Nam quadratum ex a , ad quadratum ex e , sic se habet ut recta a , ad rectam d , longitudine autem sunt incommensurabiles a , & d , ostensa: Quare quadratum ex a , quadrato ex e , incommensurabile erit per 10. defin. lib. huius.

Quocirca rectæ a , & e , potentia sunt incommensurabiles, Ac proinde ex coroll. Clavius propos. 9. lib. huius omnino & longitudine. Recta igitur e , rectæ a , propositæ, & potentia, & longitudine incommensurabilis existit.

Proposita igitur rectæ, & c. Quod erat faciendum.

S C H O L I V M E X C L A V I O.

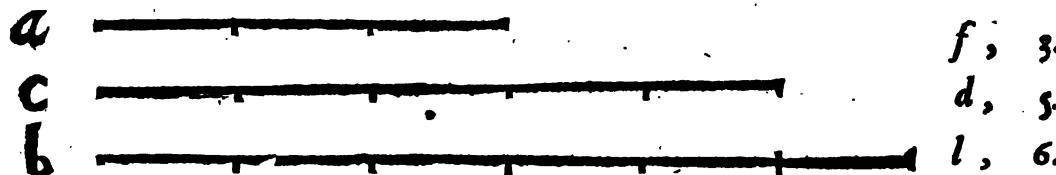
SI igitur recta a , proposita statuatur Rationis, ita ut ab ea mensura catenarum sumantur; erit & recta d , per defin. 6. Rationalis, quia potentia illius est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero e , Irrationalis ex defin. 7. cum Rationali a , incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

Ceterum ex demonstratione huius theorematis liquido constat, rectam medianam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudines tantum incommensurabiles, esse verilibet illarum incommensurabilem longitudinem & potentiam; atque adeò appellari irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationis. Ex eo enim quod rectæ a , d , sunt longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam e , inter illas medianam proportionalem esse ipsi incommensurabilis longitudine, & potentiam; Eodemque argumento ostendemus, eandem longitudinem, & potentiam ipsi d , esse incommensurabilem. Cum enim rectæ a , e , d , sint continuae proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut quadratum ex d , ad quadratum ex e , sit recta d , ad rectam a . Est autem recta d , rectæ a , incommensurabilis longitudine. Igitur & quadratum ex d , quadrato ex e , incommensurabile erit. Quare recta d , & e , ex defin. incommensurabiles sunt 10. decimi. potentia, atque adeò & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.

In codicibus vulgaris præponitur hac undecima proposicio à Theoreme propositioni decima precedenti: quod errore libri anteriorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex precedenti propositione, decima demonstretur. ut ex dictis apparet.

Theor. 9. Propos. 12.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.



SINT magnitudines a , & b , magnitudini c , commensurabiles: Dico eas esse inter se commensurabiles: Nam cum a , & c , sint ex hypothesi commensurabiles, habebit a , ad c , proportionem, quam numerus aliquis, habet ad alium numerum: Sit proportio a , ad c , numeri f , ad numerum d , id est 3. ad 5.

Rursus cum b , ad c , sint etiam commensurabiles posita, habebit b , ad c , rationem quam numerus ad numerum ex 5. propos. lib. huius. Sit igitur proportio b , ad c , numeri l , ad d , id est 6. ad 5.

Igitur cum magnitudo a , ad magnitudinem c , habeat rationem, quam numerus ad numerum, Magnitudo etiam b , habeat ad magnitudinem c , eandem rationem, quam numerus ad numerum, habebunt etiam a , & b , inter se eandem rationem, quam numerus habet ad numerum, ut vult II. propos. lib. 5. ac propterea ex 5. propos. lib. huius commensurabiles erunt a , & b , Igitur que eidem magnitudini, & c . Quod erat ostendendum.

MONITVM.

Quamvis scholium Clauij quod sequitur demonstrationi nostræ minimè sit accommodatum. Non tamen abs te me facturum puto, si hoc in loco ponam, cum inutile non sit, imò perutile ad intelligentiam demonstrationis Clauij.

SCHOLIVM EX CLAVIO.

QVOD si magnitudines a , b , c , sint linea, atque a , & b , ipsi c , longitudine commensurabiles existant, erunt quoque a , & b , inter se longitudine commensurabiles, ut constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas a , & b , proportionem habere, quam habet numerus b , ad numerum k . Quare longitudine commensurabiles erunt, ut ad propositionem 6. diximus. Si vero a , & b , fuerint ipsi c , potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo a , b , inter se commensurabiles potentia. Cum enim a , & c , sint potentia commensurabiles; erit quadratum ex a , ad quadratum ex c , ut numerus ad numerum, nempe, ut d , ad e , cum quadratum ex a , c , per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex c , ad quadratum ex b , ut numerus ad numerum, nemirum ut f , ad g . Sumptis ergo in eisdem rationibus d , ad e , & f , ad g , tribus numeris minimis b , j , k , deinceps proportionalibus, erit rursus ex equo quadratum ex a , ad quadratum ex b , ut numerus b , ad numerum k . Quare quadrata ex a , & b , commensurabiles sunt, atque ad eò linea a , b , potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, a , & b , potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duas linea, longitudine inter se commensurabiles, licet utraque cuiquam alteri linea potentia tantum sit commensurabilis; quales sunt due Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia vero tantum Rationali exposita commensurabiles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.

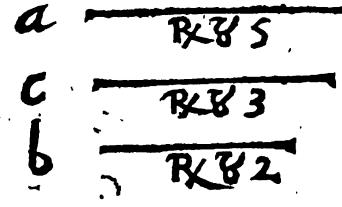
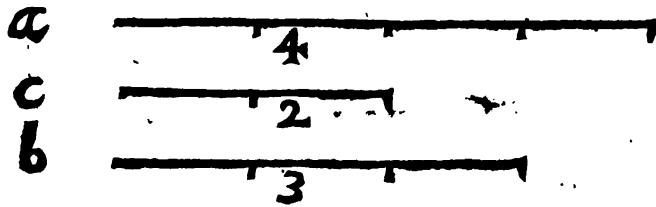
Sed & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuiquam commensurabilis, erit & reliqua eidem commensurabilis.

SINT

* 5. decimi.
3. 4. oct.
4. 6. dec.

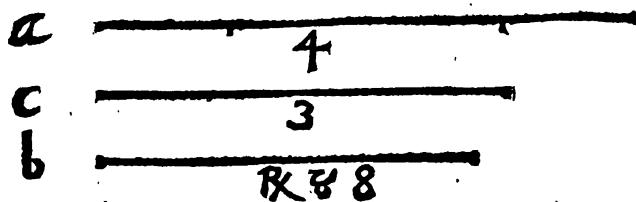
SINT enim a , & b , commensurabiles: Si que a , ipsi c , commensurabilis. Dico a , & b , eidem c , commensurabilem esse. Cum enim tam b , quam c , ipsi a , sit commensurabilis, erunt quoque b , & c , ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.



Quod si magnitudines a , b , c , sint linea, & a , b , commensurabiles longitudine, si autem a , ipsi c , commensurabilis longitudine; erit & b , reliqua eidem c , longitudine commensurabilis. Nam cum tam b , quam c , ipsi a , longitudine sit commensurabilis, erunt etiam b , c , inter se commensurabiles longitudine, ut ostendimus. At vero si linea a , & b , potentia tantum sint commensurabiles, & a , ipsi c , commensurabilis sit longitudine, & potentia, sit potentia tantum, colligemus quidem eadem argumento, reliquam b , eidem c , potentia esse commensurabilem; quia utraque b , c , ipsi a , hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothese. Non autem colligere licebit, si a , ipsi c , commensurabilis sit longitudine, reliquam b , eidem c , longitudine commensurabilem esse, quia non utraque b , c , ipsi a , longitudine commensurabilis est, sed c , quidem longitudine, ut vero b , potentia tantum, ut ex hypothese constat.

Theor. IO. Propos. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.



SINT duæ magnitudines a , & b , quarum una ipsi c , sit commensurabilis nimis a ; b , vero eidem magnitudini incommensurabilis. Dico magnitudines a , & b , incommensurabiles esse. Nam si essent magnitudines illæ a , & b , commensurabiles: Cum a , ex hypothesi ipsi c , sit commensurabilis, essent & b , c , inter se etiam commensurabiles, ut vult 12. propos. lib. huius. Quod est absurdum, cum b , ponatur ipsi c , incommensurabilis. Igitur magnitudo a , magnitudini c , incommensurabilis est. Quare si duæ magnitudines, & c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM EX CLAVIO.

SI magnitudines a , b , c , sint linea, & a , quidem ipsi c , longitudine commensurabilis, at b , eidem c , incommensurabilis longitudine: erunt a , & b , longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, ostenderemus quoque b , c , esse inter se longitudine commensurabiles (cum hoc posito, utraque b , c , ipsi a , commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Par ratione, si a , ipsi c , potentia sit commensurabilis, sit tantum, sit etiam longitudine, at vero b , eidem c , potentia incommensurabilis: erunt a , & b , potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque b , & c , potentia commensurabiles, (cum hoc posito, utraque b , c , ipsi a , potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim b , ipsi c , potentia incommensurabilis.

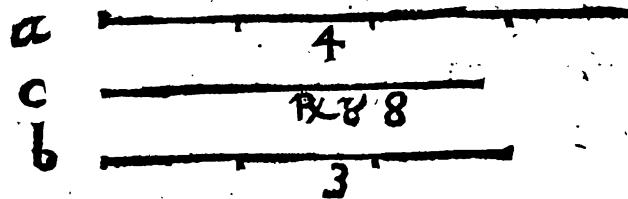
12. decimi.

Quoniam vero haec propositione 13. apud Theonem lemma est, ut postbac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon scilicet. Reliquum enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia a junioribus, & perioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

G

Theor. II. Propos. 14.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles; altera autem ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

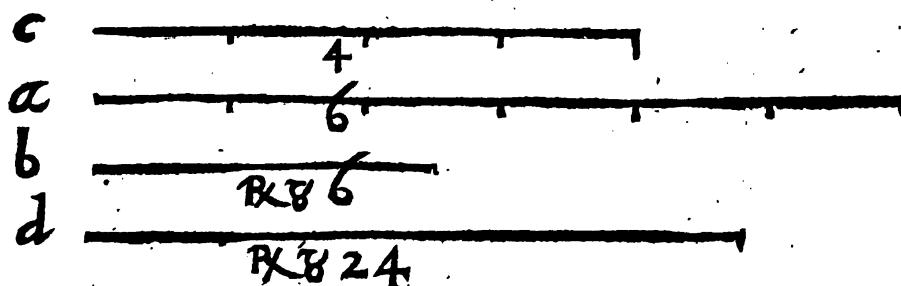


SINT duæ magnitudines commensurabiles a , & b . Sitque a , incommensurabilis magnitudini c . Dico & b , eidem c , incommensurabilem esse. Si enim a , ipsi c , commensurabilis esset, cum a , & b , ex hypothesi sint commensurabiles, essent & b , c , commensurabiles per 12. lib. huius. Quod est impossibile. Ponitur enim a , ipsi c , incommensurabilis. Non ergo magnitudines b , & c , sunt commensurabiles. Quare si sint duæ magnitudines, & c . Quod erat ostendendum.

S C H O L I U M E X C L A V I O.

H. I. C quoque si magnitudines a , b , c , sint linea, & a , b , commensurabiles longitudine; sit autem a , ipsi c , sine longitudine tantum, sive longitudine & potentia incommensurabilis; erit & b , eidem c , longitudine incommensurabilis. Si enim b , & c , essent longitudine commensurabiles, essent quoque a , & c , commensurabiles longitudine. (cum hoc posito, veraque a , & c , ipsi b , longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum, ponitur enim a , ipsi c , longitudine incommensurabilis. Quod si a , & b , commensurabiles sint potentia tantum, & a , ipsi c , potentia incommensurabilis colligamus eodem modo, & b , ipsi c , potentia incommensurabilem esse. Alias si b , c , potentia essent commensurabiles, & a , c , potentia commensurabiles essent (cum hoc posito, veraque a , c , ipsi b , potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.
Colligant porro ex hoc theoremate interproces Euclidis sequens theorema ad ea, que in hoc lib. demonstrantur, perutile.

Q V AE incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.



SINT duæ magnitudines incommensurabiles a , b , quibus commensurabiles sint c , & d , nempe c , ipsi a , & d , ipsi b . Dico & c , & d , inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim a , & c , commensurabiles ponuntur, & est a , ipsi b , incommensurabilis, erit quoque reliqua c , eidem b , incommensurabilis. Rursus quia d , & b , commensurabiles ponuntur, & est b , ostensa ipsi c , incommensurabilis, erit & reliqua eidem c , incommensurabilis. Quod est propositum.

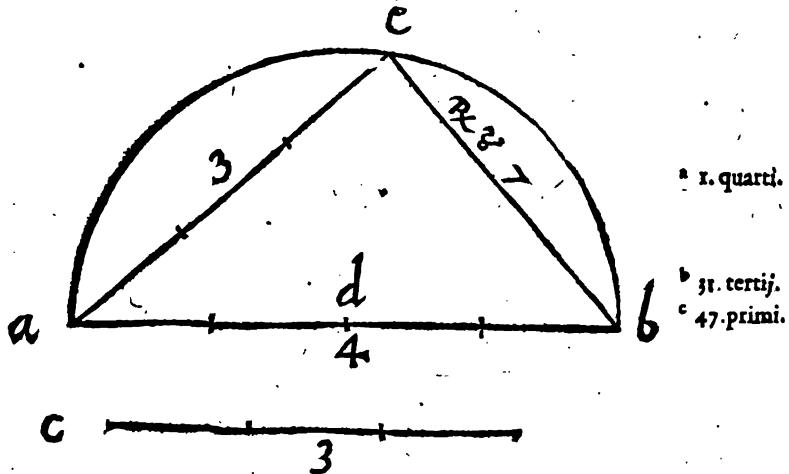
Si autem magnitudines a , b , c , d , sint linea, & a , b , vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia, sine autem c , d , ipsi a , b , longitudine commensurabiles; erunt c , & d , eodem arguento, longitudine incommensurabiles. Si vero a , & b , incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantum commensurabiles c , & d , ostendamus similiter c , & d , potentia esse incommensurabiles; ut perspicuum est.

L E M M A.

D V A B V S datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quod maior plus potest, quam minor.

QVAM VIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex iis, que tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstrantur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datae due rectæ lineæ inæquales a b, & c, quarum a b, maior, operatque inuenire, quò a b, plus possit, quam c. Divisa a b, bifariam in d, describatur ex centro d, & intervallo d a, vel d b, semicirculus a e b, in quo aptetur recta a e, ipsi c equalis, iungaturque recta e b. Dico rectam a b, plus posse, quam c, quadrato recta e b.

Cum enim angulus e, in semicirculo rectus sit; erit quadratum ex a b, equalē quadratis ex a e, e b, atque idcirco a b, plus poterit, quam a e, hoc est, quam c, quadrato recta e b. Quod est propositum.



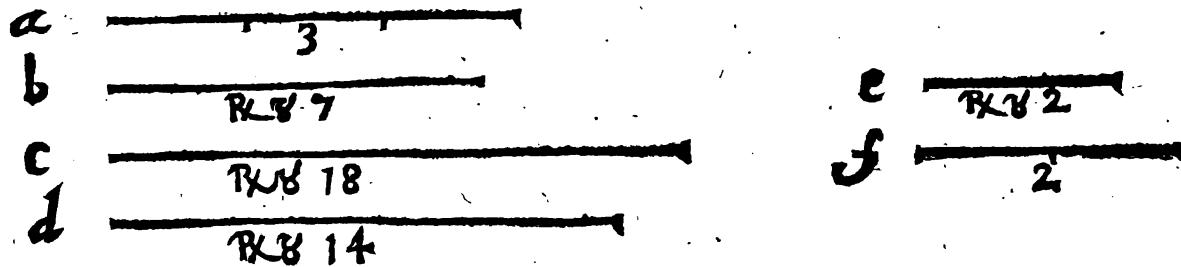
SIMILITER.

D V A B VS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

HOC etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura datæ due rectæ a e, e b, que si coniungantur ad angulum rectum e, poterit eas recta ducta a b, quippe cum quadratum ex a b, equalē 47. primi, sit quadratis ex a e, e b.

Theor. 12. Propos. 15.

S I quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quam quartæ, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tantò plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit, quam quartæ, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.



SINT quatuor magnitudines proportionales a, b, c, d, primâque a, plus possit, quam secunda quadrato rectæ e, & c, tertia plus possit, quam quartæ d, quadrato rectæ f. Dico si e, sit commensurabilis ipsi a, & f, commensurabilem esse ipsi c. Si vero e, incommensurabilis ipsi a, & f, rectæ c, incommensurabilem esse. Cum enim sit, ut a, ad b, secundam, ita c, ad d, quartam, erit eodem modo quadratum ex a, ad quadratum ex b, sicut quadratum ex c, ad quadratum ex d, ut constat ex 22. propos. lib. 6. Quadratum autem ex a, æquale est quadratis ex b, & e, quadratum-

EV CLIDI S

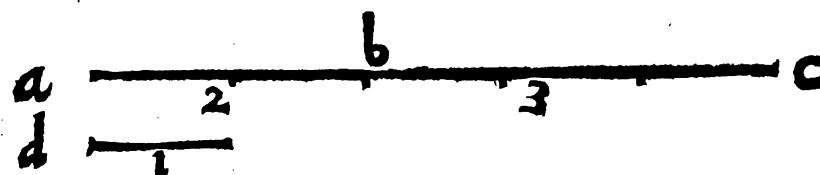
que ex c, & equale quadratis ex d, f, ex hypothesi. Quare componendo, vt quadrata ex b, & e, ad quadratum ex b, Ita quadrata ex d, f, ad quadratum ex d, & dividendo, vt quadratum ex e, ad quadratum ex b, Ita quadratum ex f, ad quadratum ex d, ac proinde erit, vt recta e, ad rectam b, ita recta f, ad rectam d, & conuertendo, vt b, ad e, ita d, ad f, Atqui ex aequo, vt a, ad e, ita c, ad f, Si igitur a, longitudine est commensurabilis ipsi e, erit pari ratione, & c, longitudine commensurabilis ipsi f; Si verò a, ipsi e, incommensurabilis sit longitudine & c, etiam ipsi f, erit incommensurabilis longitudine. Si igitur quatuor, & c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I V M E X . C L A V I O .

E O D E M argumento ostendemus, si e, potentia tantum commensurabilis fuerit ipsi a, & f, potentia tantum ipsi c, esse commensurabilem, ut constat ex ijs, que in scholio propos. 10. bnius lib. i. cripsum.

Theor. 13. Propos. 16.

S i duæ magnitudines commensurabiles componantur ; & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit ; & quæ à principio magnitudines commensurabiles erunt.



C O M P O N A N T V R duæ magnitudines commensurabiles a b, b c, Dico totam a c, ex illis duabus compositam vtrique magnitudini a b, b c, esse commensurabilem. Quoniam enim a b, b c, sunt commensurabiles, habebunt aliquam communem mensuram vtramque metientem, ut vult prima defin. lib. huius: Sit igitur illa communis mensura d, Igitur cum d, magnitudines a b, b c, metietur, metietur & a c, ex illis compositam, ut vult i. pronunciatum Clavi lib. huius. Quare cum d, metietur rectam a c, & a b, erunt a c, a b, commensurabiles per i. defin. Parique ratione cum d, metietur a c, & b c, erunt etiam magnitudines ille commensurabiles, atque adeò a c, vtrique ipsarum commensurabilis erit.

Nunc igitur cum tota a c, ex a b, b c, composita sit commensurabilis alteri ipsarum a b, b c, nimis ipsi a b, Dico a b, & b c, esse inter se commensurabiles. Inueniatur igitur communis mensura ipsarum, sitque d. Quoniam d, metitur totam a c, & ablatam a b, metietur quoque d, reliquam b c, per 3. pronunciatum: Igitur a b, b c, commensurabiles sunt, cum d, sit ipsarum communis mensura.

S i duæ igitur magnitudines, & c. Quod erat ostendendum.

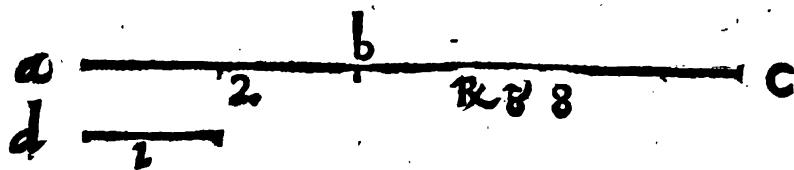
C O R O L L A R I V M E X C L A V I O .

H I N C sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliqua commensurabilem esse. Ut si a c, ipsi a b, sit commensurabilis, esse quoque eandem a c, reliqua b c, commensurabilem. Nam ut in posteriori parte theorematis ostensum est, semper d, communis mensura totius a c, & ablatæ a b, cum metietur totam a c, & ablatam a b, metietur quoque reliquam b c, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt a c, b c, Quod est propositum.

Theor.

Theor. 14. Propos. 17.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo utriusque ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.



SINT duæ magnitudines incommensurabiles a b, b c, simul compositæ, Dico totam magnitudinem a c, utriusque ipsarum a b, b c, esse incommensurabilem. Si enim non est incommensurabilis, sit igitur vni earum commensurabilis, quare magnitudines illæ habebunt aliquam communem mensuram, per 1. defin. Sicutque illa d, qua metiatur a c, a b, Igitur cum d, metiatur totam a c, ablatamque a b, metietur quoque d, reliquam b c, ex tertio pronunciato Clavi, ac proinde cum d, sit communis mensura magnitudinum a b, b c, erunt a b, b c, commensurabiles. Quod est contra hypothesin. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est a c, ipsi a b, parique ratione nec ipsi b c, commensurabilis, sed utriusque ipsarum incommensurabilis.

Nunc verò tota a c, ex a b, b c, composita incommensurabilis sit vni ipsarum componentium nimirum ipsi a b, Dico ergo a b, b c, esse incommensurabiles. Si enim commensurabiles essent, erit quoque tota a c, utriusque a b, b c, commensurabilis, ut vult 16. propos. lib. huic. Quod est falsum, ponitur enim a c, alteri ipsarum a b, incommensurabilis. Non igitur commensurabiles sunt a b, b c, Parique ratione demonstrabitur a b, b c, incommensurabiles esse, modo a c, magnitudini b c, incommensurabilis fuerit. Duæ igitur magnitudines, ergo c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM EX CLAVIO.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliqua incommensurabilem esse. Nempe si a c, incommensurabilis sit ipsi a b, esse quoque eandem a c, reliqua b c, incommensurabilem. Si enim a c, ipsi b c, foret commensurabilis, esset quoque a c, ex coroll. præcedentis proposit. reliqua a b, commensurabilis. Quod est absurdum, ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo a c, ipsi b c, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

PER SPICVM est in duabus proximis antecedentibus propositionibus, et uniusque corollaris, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad utriusque propositionis demonstrationem communis mensura d, ergo quam quidem solum linea longitudine inter se commensurabiles habent, ut ex defin. apparet.

LEMMA I.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

{ HOC lemma demonstramus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

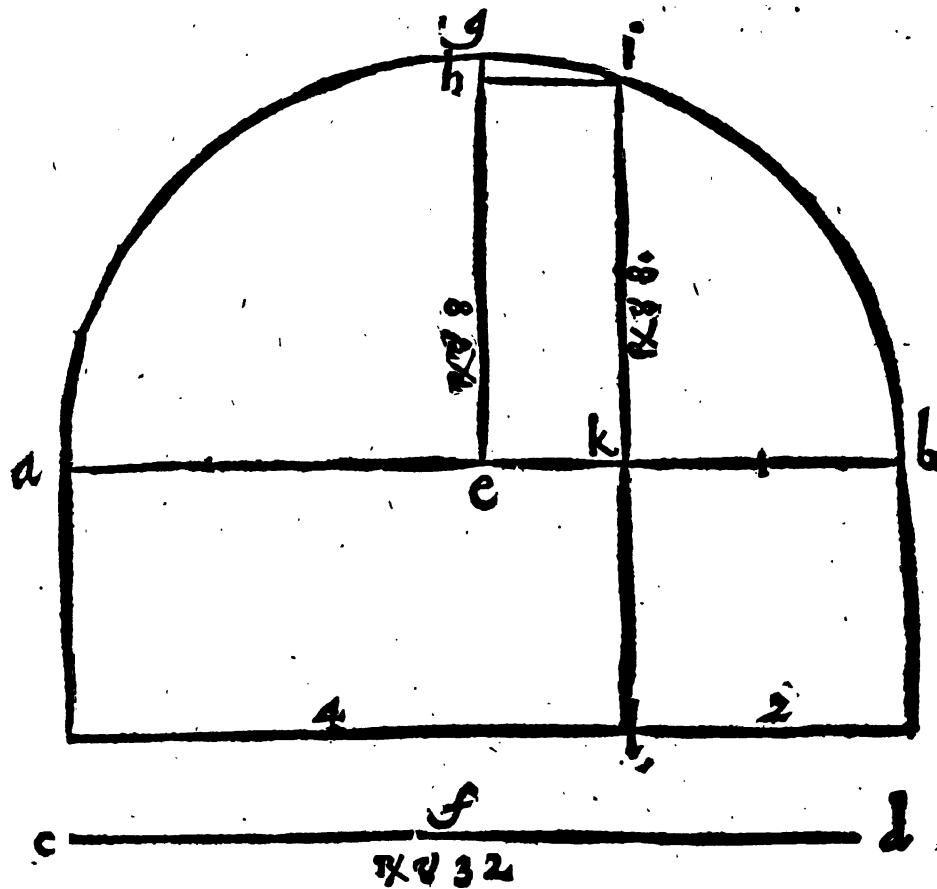
1.

H

LEMMA . II.

Duvabvs datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata.

QVAM V I S id, quod hoc lemmate proponitur, absolvi possit ex propos. 28. lib. 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea descripti minor sit rectangulo ad dimidium maioris linea applicato, deficiente figura quadrata, ut vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris linea descriptum, (quod quidem quarta pars est quadrati ex tota descripta, ex scholio propos. 4. lib. 2.) minus sit quadrato ex dimidia parte maioris descripto; (quod quidem applicatum est ad dimidium maioris, deficiente figura quadrata.) Quamvis, inquam, absolvi hoc possit per proposit. 28. lib. 6. libet tamen id ipsum hoc in loco cum aliis interpretibus exequi alia ratione faciliiori.



SINT igitur data recte inaequales a b, c d, quarum a b, maior sit, oportetque ad a b, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum aquale sit quarta parti quadrati ex recta c d, descripti. Secuti rectis a b, c d, bifariam in e, & f, describasur ex centro e, & inter- uallo e a, vel e b, semicirculus a g b, & ex e, perpendicularis ad a b, ducatur e g. Et quia tota a b, maior ponitur, quam tota c d, erit quoque a e, dimidia ipsius a b, hoc est e g, ipsi a e, equalis, maior, quam c f, dimidia ipsius c d. Posita igitur e h, equali ipsi c f, agatur per h, ipsi a b, parallela h i, demittaturque i k l, ad a b, perpendicularis, & sit k l, ipsi k b, equalis; Ac tandem perficiatur rectangulum a l, & quadratum b l. Dico parallelogrammum a l, applicatum ad rectam a b, deficiens figura quadrata b l, aquale esse quartae parti quadrati recta c d. Quoniam enim k i, media proportionalis est inter a k, k b, ut in scholio propos. 13. lib. 6. tradidimus, erit rectangulum sub a k, k b, hoc est, rectangulum a l, aquale quadrato ex k i, hoc est, quadrato ex e h; (est enim k i, ipsi e h, equalis, ob parallelogrammum e i,) hoc est, quadrato ex c f. Est autem quadratum ex c f, quarta pars quadrati ex c d, quod quadratum ex c d, per scholium propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati ex c f. Igitur parallelogrammum a l, ad rectam a b, applicatum deficiensque quadrato b l, aquale est quartae parti quadrati ex c d, descripti. Quod est propositum.

ELEMENTVM DECIMVM.

31

SCHOLIVM II.

Ex hoc lemmate absolvemus et hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

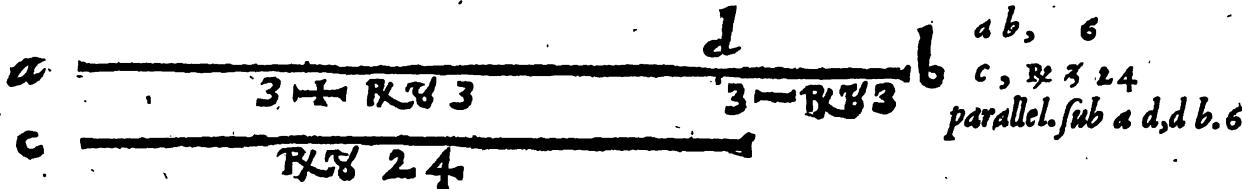
Datam rectam lineam ita secare, ut rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum à dimidia linea descriptum.

SIT enim recta data a b, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex c f, non maius, quam quadratum ex dimidia a e, ita ut latus c f, non maius sit latero a e. Educat ergo ad a b, perpendiculari c g, si e h, equalis ipsi c f. Deinde acta b i, parallela ipsi a b, demittatur i k, perpendicularis ad a b. Quibus peractis ostendemus, ut prius, rectangulum sub partibus a k k b, æquale esse quadrato ex i k, hoc est, quadrato ex c f, atque adeò et rectilineo dato, cui æquale est postum quadratum ex c f. Quod est propositum. Dicimus autem, rectilinum datum non debere esse maius, quam quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta c f, maior, quam recta e g. Quare ex e g, abscondi non posset recta ipsi c f, equalis: quod tamen ad problema efficiendum requiratur, ut ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt inæqualia.

SINT dua rectæ inæquales a b, & c; & ad maiorem a b, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sítque illud æquale quarte parti quadrati ex minore c, descripti, ita ut d b, latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta a d, d b, inæqualia esse.



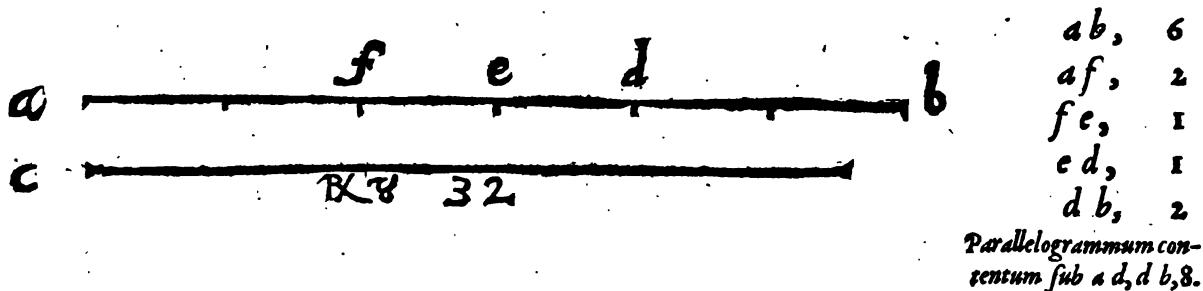
SI enim a d, d b, segmenta dicantur esse equalia; cum ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad a b, deficiensque figura quadrata ex d b, descripta, æquale sit rectangulo sub a d, d b, sit autem quod sub equalibus a d, d b, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex a d, dimidio ipsius a b, descriptum atque adeò ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex a b, quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex c, per hypothesin, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quarte parti, quadrati ex c. Igitur quadrata rectarum ex a b, & c, equalia sunt, atque rectæ a b, & c, æquales. Quod est absurdum. Ponantur enim inæquales, & a b, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta a d, d b. Quod est propositum.

Hoc facile etiam appetat ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per constructionem e h, equalis dimidiate parti ipsius c d, nempe ipsi c f, dubitateque h i, parallela ipsi a b, & tandem demissa perpendicularis i k, ut partes factæ ex applicatione sint a k, k b; manifestum est a k, k b, segmenta esse inæqualia, cum a b, in c, scita sit bifariam. Immò hiac constat, prius segmentum maius esse, & posterius quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

Theor. 15. Propos. 18.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: maior tantò plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tantò plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens

figura quadrata : in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.



SINT duæ rectæ inæquales $a b,$ & c , quarum $a b$, maior, appliceturque ad maiorem $a b$, parallelogrammum æquale quartæ parti quadrati ex minore c , descripti deficiens figura quadrata, illudque agatur ut docet lemma secundum Clauij propos. antecedentis, sitque illud quod sub $a d, d b$, continetur, siveque segmenta $a d, d b$, longitudine commensurabilia. Dico rectam $a b$, plus posse, quam c , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.

Nam cum ex lemma 3. Clauij antecedentis propos. a d, sit maior, quam $d b$, & $a b$, diuisa sit bifariam in puncto e , siveque e d, sumpta sit æqualis $e f$, erunt totæ $e a$, & $e b$, æquales atque & ablatae $e f$, & $e d$, ac propterea & reliqua $f d$, & $d b$, æquales. Et quoniam recta $a b$, diuisa est bifariam in puncto e , & non bifariam in d , rectangulum sub $a d, d b$, vna cum quadrato ex $e d$, æquale erit quadrato ex $e b$, descripto, ut vult 5. propos. lib. 2. Ac proinde quadratum rectanguli sub $a d, d b$, & quadrati ex $e d$, æquale erit quadruplo quadrati ex $a b$, descripti. Est autem quadruplo rectanguli sub $a d, d b$, contenti æquale quadratum ex c , (rectangulum enim sub $a d, d b$, æquale ponitur quartæ parti quadrati ex c) & quadruplo quadrati ex $e d$, æquale est quadratum ex $f d$, ut constat ex scholio Clauij propos. 4. lib. 2. cum $f d$, dupla sit ipsius $e d$, & quadruplo quadrati ex $e b$, æquale est quadratum ex $a b$, ut constat ex eodem scholio Clauij propos. 4. lib. 2. Quare quadrata ex rectis c , & $f d$, æqualia erunt quadrato ex $a b$. Atque adeò & recta $a b$, plus potest, quam c , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis nempe $f d$.

Quod autem sit $f d$, recta $a b$, longitudine commensurabilis, sic demonstratur, cum recta $a d$, $d b$, ex constructione longitudine sint inter se commensurabiles erit tota $a b$, parti $d b$, longitudine commensurabilis, ut colligitur ex 16. propos. huius lib. Est autem & ipsi $d b$, composita ex $d b, a f$, longitudine commensurabilis, cum composita ex $d b, a f$, dupla sit ipsius $d b$.

Igitur cum utraque $a b$, & composita ex $d b, a f$, longitudine sit commensurabilis ipsi $d b$, erunt quoque & $a b$, & composita ex $d b, a f$, longitudine inter se commensurabiles. Ac propterea cum $a b$, sit composita ex $a f, d b$, tanquam vna, & ex $f d$, commensurabilis sit longitudine compositæ ex $a f, d b$, erit eadem $a b$, ex corollario Clauij propos. 16. lib. huius longitudine commensurabilis reliqua $f d$. Quare $a b$, plus potest, quam c , quadrato rectæ $f d$, sibi commensurabilis longitudine.

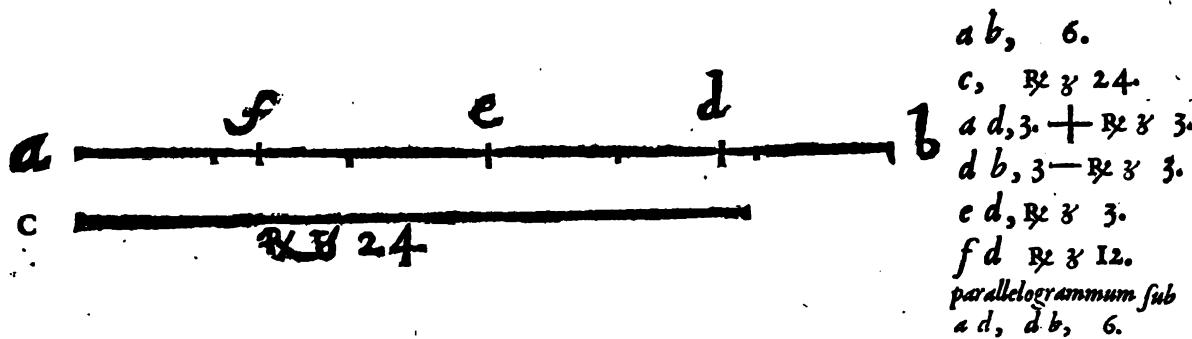
Iam vero $a b$, plus possit, quam c , quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati ex c , descripti applicatum sit æquale parallelogrammum deficiensque figura quadrata, faciens segmenta $a d, d b$, longitudine commensurabilia. Dico rectas $a d, d b$, esse commensurabiles longitudine. Isdem enim constructis ut supra, facile erit demonstrare rectam $a b$, plus posse, quam c , quadrato rectæ $f d$. Quoniam cum $a b$, ponatur plus posse, quam c , quadrato rectæ $f d$, sibi longitudine commensurabilis, erunt rectæ $a b, f d$, longitudine commensura-

biles. Tota igitur $a b$, composita ex $f d$, & ex $a f, d b$, tanquam una commensurabilis existens ipsi $f d$, erit $a b$, etiam longitudine commensurabilis reliqua compositae ex $a f, d b$, ex corollario Clavi propos. 16. lib. huius. Est autem composita ex $a f, d b$, ipsi $d b$, longitudine commensurabilis, cum sit eius dupla. Quare cum tam $a b$, quam $d b$, longitudine commensurabilis sit compositae ex $a f, d b$, erunt quoque & $a b, d b$, inter se longitudine commensurabiles, atque adeo cum tota $a b$, componatur ex $a d, d b$, quae commensurabiles sunt longitudine ipsi $d b$, erunt $a d, d b$, inter se etiam longitudine commensurabiles, ut vult 16. propos. lib. huius.

Si fuerint igitur due rectæ, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 16. Propos. 19.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, & quale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tantò plus poterit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tantò plus possit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, & quale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.



Sint due rectæ inæquales $a b$, & c , quarum $a b$, maior sit, & ad maiorem $a b$, applicetur parallelogrammum & quale quarta parti quadrati ex minore c , descripti deficiensque figura quadrata, sique quod sub $a d, d b$, continetur, faciens segmenta longitudine incommensurabilia $a d, d b$. Dico $a b$, plus posse, quam c , quantum est quadratum rectæ sibi longitudine incommensurabilis.

Quoniam enim ex 3. lemmate Clavi antecedentis propositionis $a d$, maior est, quam $d b$, Diuidatur $a b$, bifariam in punto e , ipsique $e d$, sumatur alia & equalis $e f$, Igitur cum tota $e a, e b$, sint & quales nimis dimidie ipsius $a b$, & ablatæ quoque & quales erunt necessariæ, & reliqua & quales, ut vult propos. 19. lib. 5. Quoniam verò recta $a b$, dividitur in punto e , bifariam, & non bifariam in punto d , erit rectangulum sub $a d, d b$, vna cum quadrato ex $e d$, & quale quadrato ex $e b$, dimidia ipsius $a b$, ut constat ex 5. propos. lib. 2. Ac propterea quadratum rectanguli sub $a d, d b$, & quadrato ex $e d$, & quale erit quadruplo quadrati ex $a b$. Est autem quadruplo rectanguli sub $a d, d b$, & quale quadratum ex c . Ponitur enim rectangulum contentum sub $a d, d b$, & quale quartæ parti quadrati ex minore c , descripti, & quadruplo quadrati ex $e d$, & quale est quadratum ex $f d$, per ea, quæ tradidit Clavius in scholio propos. 4. lib. 2. cum recta $f d$, ipsius $e d$, sit dupla, Et quadruplo quadrati ex $e b$, & quale est quadra-

tum ex $a b$, cum etiam $a b$, dupla sit ipsius $a b$, Igitur quadrata ex c , & $f d$, aequalia sunt quadrato ex recta $a b$, descripto. Quare recta $a b$, plus potest, quam c , quadrato rectae $f d$.

Quod autem $f d$, longitudine incommensurabilis existat ipsi $a b$, sic demonstrabimus. Quoniam recta $a d$, $d b$, longitudine ponuntur incommensurabiles, erit quoque tota $a b$, parti $d b$, longitudine incommensurabilis, ut constat ex 17. propos. lib. huius. $d b$, vero commensurabilis est longitudine compositae ex $d b$, $a f$, Cum haec illius dupla sit. Quare cum duarum magnitudinum commensurabilium $d b$, & quae componitur ex $d b$, $a f$, ipsa $d b$, sit incommensurabilis longitudine, erit reliqua composita ex $a f$, $d b$, eidem $a b$, longitudine incommensurabilis, ut vult 14. propos. lib. huius: Atque adeo cum $a b$, componatur ex $a f$, $d b$, tanquam una, & ex $f d$, incommensurabilis existat longitudine compositae ex $a f$, $d b$, erit eadem $a b$, reliqua $f d$, longitudine incommensurabilis, ut pater ex coroll. Clavi propos. 17. lib. huius. Quocirca $a b$, plus potest, quam c , quadrato rectae $f d$, quae ei longitudine est incommensurabilis.

Iam vero $a b$, plus poscit, quam c , quadrato rectae sibi incommensurabilis, quare verò parti quadrati ex minore c , descripti aequali parallelogrammum applicatum sit ad $a b$, deficiensque figura quadrata, sintque in recta $a b$, partes $a d$, $d b$, longitudine incommensurabiles. Iisdem constructis ut supra, facile erit demonstrare ut prius, rectam $a b$, plus posse quadrato rectae $f d$.

Igitur cum $a b$, ex hypothesi ponatur plus posse, quam c , quadrato rectae sibi incommensurabilis longitudine, erit & $a b$, ipsi $f d$, longitudine incommensurabilis. Quare cum tota $a b$, componatur ex $f d$, & ex $a f$, $d b$, tanquam una existaque incommensurabilis longitudine ipsi $f d$, erit ex coroll. Clavi propos. 17. lib. huius $a b$, reliqua compositae ex $a f$, $d b$, etiam longitudine incommensurabilis.

Est autem ea, quae componitur ex $a f$, $d b$, ipsi $d b$, longitudine commensurabilis, cum sit illius dupla. Igitur cum duarum magnitudinum commensurabilium nimirum, quae ex $a f$, $d b$, componitur & $d b$, ipsa composita ex $a f$, $d b$, longitudine incommensurabilis sit. ipsi $a b$, erit & reliqua $d b$, eidem $a b$, incommensurabilis longitudine, ut docet 14. propos. lib. huius. Ac propterea cum tota $a b$, componatur ex $a d$, $d b$, quae incommensurabilis est ipsi $d b$, erunt rectae $a d$, $d b$, inter se incommensurabiles longitudine per 17. propos. lib. huius.

Quare si fuerint due rectae inaequales, & c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I U M I . C L A V I I .

Egit hactenus Euclides, de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus, nunc ad Rationales, & Medias transfit in sequentibus.

L E M M A I .

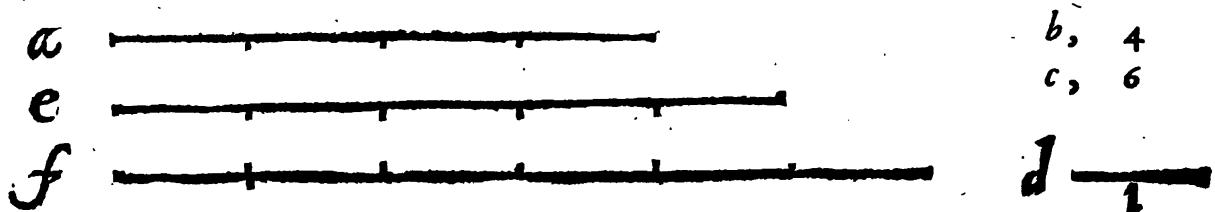
QUONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: potentia vero commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si exposita Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si vero exposita Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si exposita Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

LEMMA II.

EX PROCLO. Rationales vocat eas lineas, que expositae Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. Sunt autem & aliae lineae, que longitudine quidem expositae Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationalis; commensurabiles, in quam, inter se vel longitudine & potentia, vel potentia solum: Et si quidem longitudine, dicuntur & ipse Rationales longitudine inter se commensurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si vero potentia inter se solum sunt commensurabiles: dicuntur ipse quoque Rationales potentia solum inter se commensurabiles.

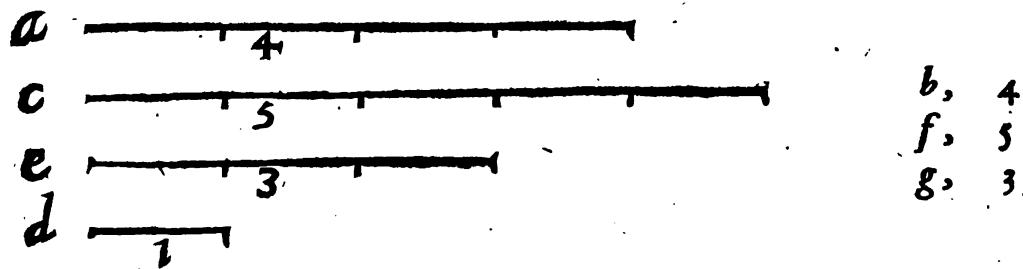
S C H O L I V M I I.

IT A Q V E ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera aequalis est exposita Rationali; ac proinde utraque Rationali commensurabilis quoque longitudine; Aut neutra Rationali exposita aequalis est, longitudine tamen ei utraque est commensurabilis: Aut denique utraque exposita Rationali commensurabilis est solum potentia. Hac autem tria genera inuenimus hoc modo.



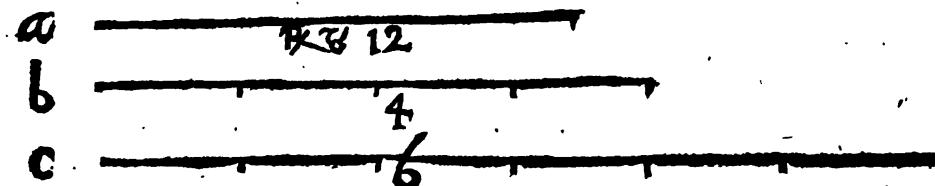
Sic exposita Rationalis a, divisa in quatuor partes, quot uimurum unitates sunt in numero b, Sumpto deinde quilibet abo numero c. Sic d, recta una partem recte a, & quoties d, metitur linearum a, toties metiatur quandam aliam e. Item quoties unitates est in c, toties eadem d, metiatur quampiam aliam lineam f. Quoniam igitur a, & e, componuntur ex paribus multitudine aequalibus, qua quidem magnitudine aequales sunt ipsi d, ipse aequales erunt. Rursus quia d, metitur omnes tres a, e, & f, erunt omnes tres a, e, & f, longitudine commensurabiles. Quare e, & f, Rationalis a, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensa longitudine inter se commensurabiles, cum habeant d, communem mensuram. Invenientur ergo sunt duo Rationales e, f, longitudine commensurabiles & inter se, & exposita Rationali a, & quarum una nempe c, aequalis est Rationali exposita a.

Iam vero d, metiatur duas linearum quasdam c, e, per duos numeros f, g, quorum neuerit idem sit quis b, ita ut utraque linea c, & e, inaequalis sit ipsi a, erunt igitur ut prius, tres recte a, c, e, mensuram habentes communem d, longitudine com-



mensurabiles. Quare c, e, Rationali a, longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sunt longitudine commensurabiles, inuenientur duo Rationales c, e, longitudine commensurabiles, & inter se, & exposita Rationali a, quarum neutra aequalis est Rationali exposita a.

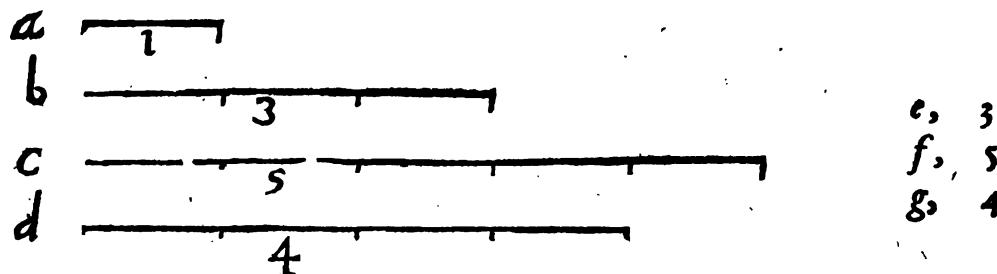
Postrem exposita Rationali a, inueniatur recta b, longitudine tantum incommensurabilis, que secetur in quocunque par-



EV GLIDI S

res aequales, & sumatur c, compposita ex aliis quotunque partibus, que magnitudine aequales sint partibus rectæ b. Quo facto erunt b, & c, longitudine commensurabiles. Dico easdem exposita Rationes a, potentia solum esse commensurabiles. Quoniam enim a, b, potentia sunt commensurabiles, erit quadratum ex a, quadrato ex b, commensurabile. Est autem eidem quadrato ex b, commensurabile quadratum ex c, quod b, c, longitudine sint commensurabiles, atque adeo & potentia. Igitur quadrata rectarum a, & c, commensurabilita quoque inter se sunt. Quare c, ipsi a, potentia est commensurabilis. Et quia duorum rectarum b, c, longitudine commensurabilium b, est ipsi a, longitudine incommensurabilis, erit quoque reliqua c, eidem a, longitudine incommensurabilis. Est ergo c, solum potentia ipsi a, commensurabilis. Et quia b, & c, Rationes exposita a, potentia com-
verò tantum commensurabiles exposita Ratione a, Quod est propositum.

Quod si quis optet inuenire quoscunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo.

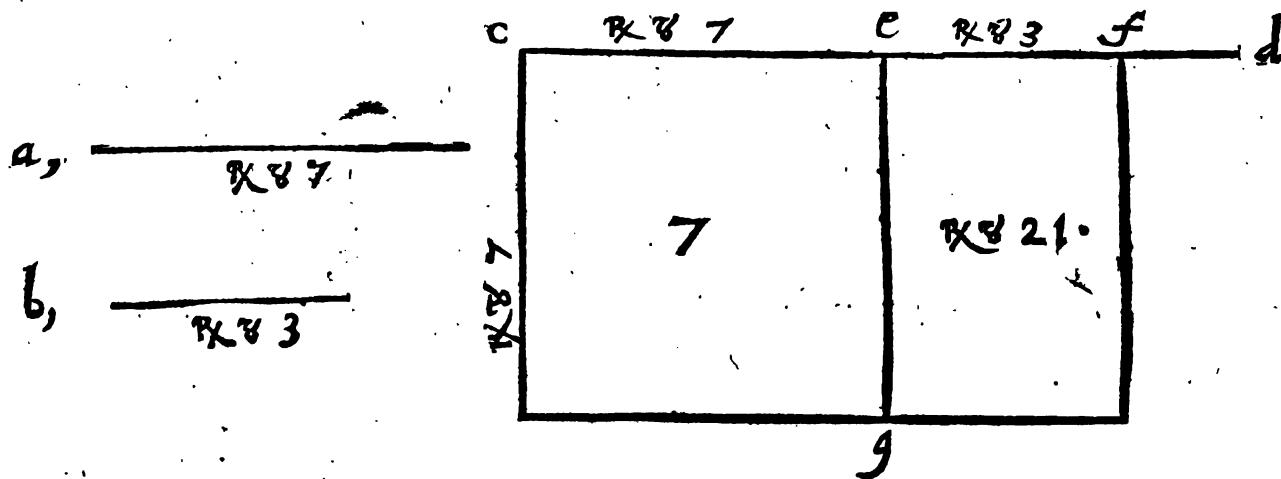


Sumpsum mensura quatuor a, componantur quotlibet lineæ b, c, d, ex eis partibus ipsi a, aequalibus, quæ sunt unitates in totidem numeris inqualibus e, f, g, Nam lineæ b, c, d, habentes communem mensuram a, longitudine commensurabiles erunt.

Ceterum & omnes lineas Rationales, non solum exposita Ratione, sed etiam inter se esse commensurabiles, facile hoc modo demonstrabimus. Quoniam Rationales lineæ sunt, que exposita Ratione sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; qua autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt, manifestum est, Rationales lineas quoscunque inter se commensurabiles esse.

LEMMA III.

Si sint due rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.



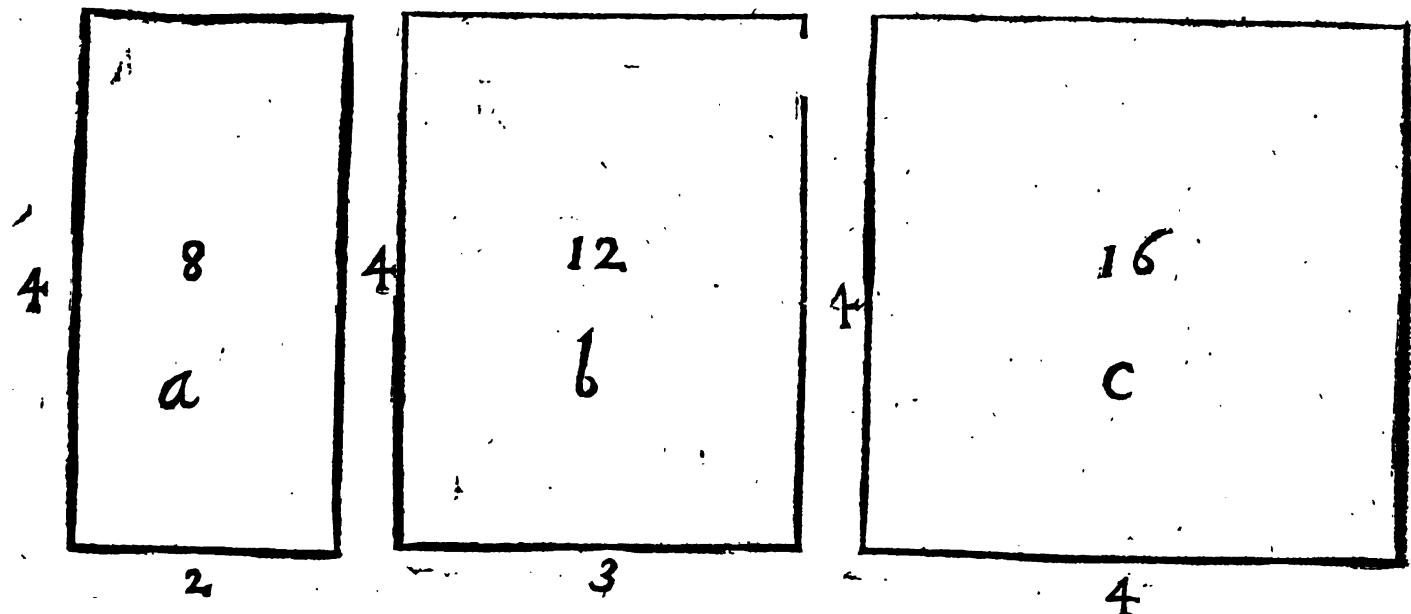
SINT due rectæ a, & b, Dico esse ut a, ad b, ita quadratum ex a, ad rectangulum sub a, & b, comprehensum. Ex quantacunque enim linea recta c d, absindatur c e, ipsi a, aequalis & e f, ipsi b, deinde super c e, describatur quadratum c g, perficiaturque rectangulum g f, contentum sub c e, & e f, hoc est, sub a, & b, Quoniam igitur est ut c e, ad e f, hoc est, ut a, ad b, ita parallelogrammum c g, hoc est, quadratum ex a, ad parallelogrammum g f, sub a, & b, comprehensum; perficuum est, si sint due rectæ lineæ, esse primam ad secundam, ut quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.

Eodem modo erit, ut b, ad a, ita rectangulum f g, ad quadratum g c. Quod est propositum.

LEMMA.

LEMMA III.

SPATIVM Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.

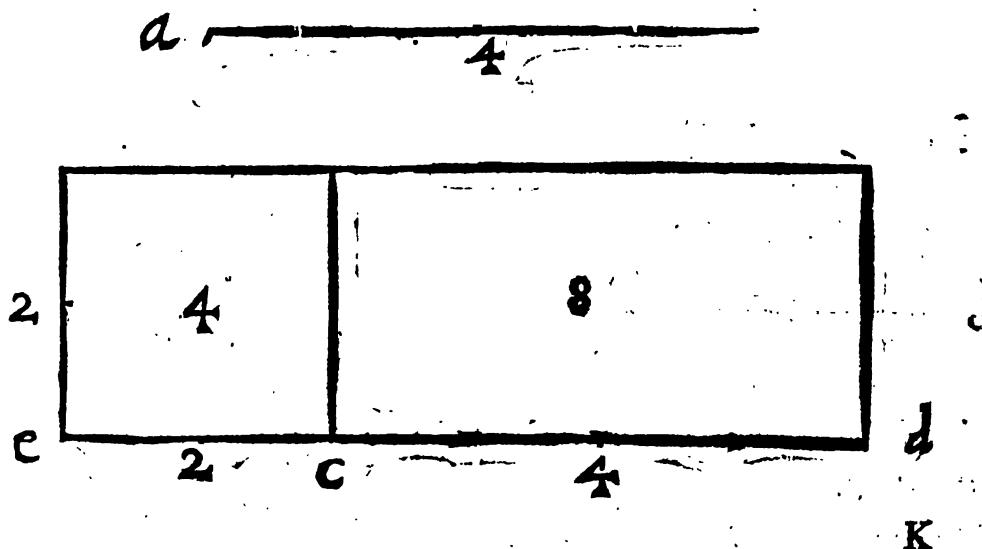


SIT spatium a , commensurabile Rationali spatio b . Dico & a , Rationale esse. Sit namque c , quadratum Rationale, ratione cuius aliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, quod nimis ab exposita Rationali describitur. Quoniam igitur b , Rationale est, erit ipsum Rationali c , commensurabile: Est $\frac{a}{c}$ 9. defin. autem & a , ipsi b , commensurabile. Igitur a , & c , cum commensurabilia sint ipsi b , inter se quoque $\frac{a}{c}$ 12. decimi commensurabilia erunt; ac proinde spatium a , Rationali quadrato c , ex Rationali linea exposita descripta commensurabile, Rationale est. Quod erat demonstrandum.

Theor. 17. Propos. 20.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem praedictorum modorum, continetur rectangulum, Rationale est.

EXPO NATVR Rationalis linea a , describaturque rectangulum $b d$, sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus contentum, nemp^e $b c, c d$, secundum aliquem praedictorum modorum, quos Clavius in scholio 2. antecedentis propos. tradidit.

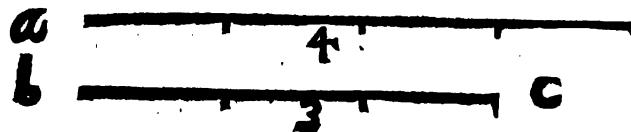


DICO rectangulum $b d$, esse Rationale. Describatur ex altera earum nimisrum ex $b c$, quadratum $b e$, Quoniam igitur $b c$, est Rationalis, Rationalique a , expositæ commensurabilis longitudine, erit quoque quadratum $b e$, ex $b c$, descriptum quadrato ex a , commensurabile, ut vult 3. definitio lib. huic. At quadratum ex a , Rationali, Rationale est, ratione cuius alia Rationalia, vel Irrationalia dicuntur. Quare quadratum $b e$, illi commensurabile, Rationale est, ut vult 9. defin. lib. huic. Quoniam verò $b c$, hoc est $e c$, & $c d$, longitudine sunt commensurabiles (sunt enim ex hypothesi $b c, c d$, Rationales, & inter se longitudine commensurabiles) estque, ut $e c$, ad $c d$, ita $e b$, ad $b d$. per 1. propos. lib. 6. Quare rectangulum $b d$, & quadratum $b e$, commensurabilia sunt, ut vult 10. defin. lib. huic. Constat igitur ex 4. lemmate Clavij antecedentis propos. b d, Rationali $b e$, commensurabile, Rationale esse.

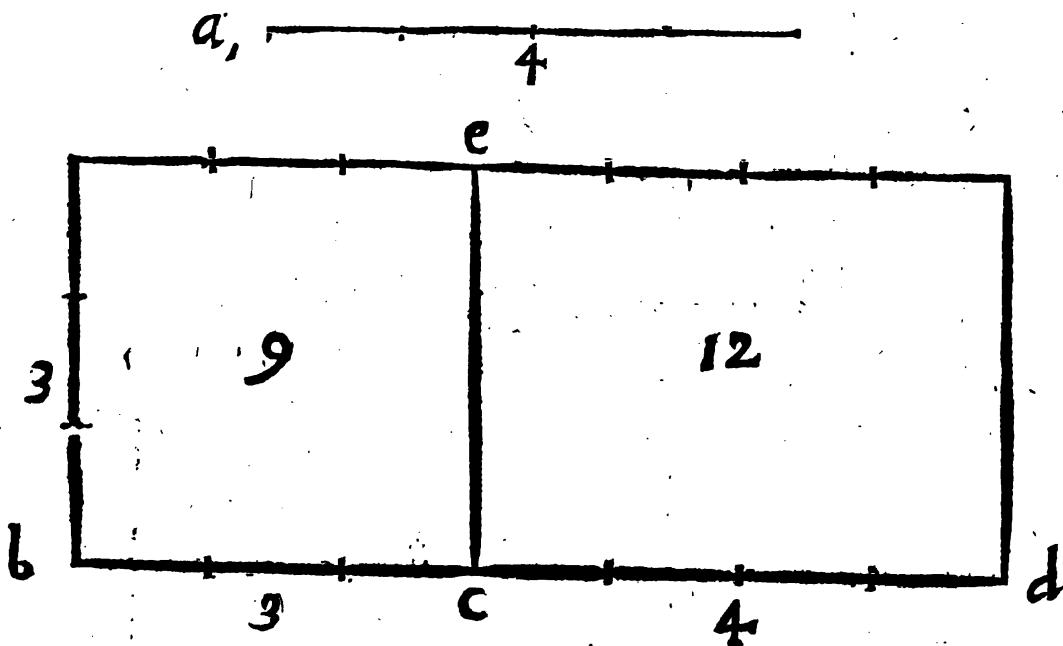
Quare sub Rationalibus longitudine, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 18. Propos. 21.

Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.



EXPO N A T V R Rationalis a , & alia etiam Rationalis $b c$, secundum aliquem predictorum modorum, quos Clavius tradidit in scholio 2. propositionis antecedentis, & ad Rationalem $b c$, applicetur Rationale $e d$, faciens latitudinem $c d$, Dico $c d$, esse Rationalem, & ipsi $b c$, commensurabilem longitudine.



E X b c, verò describatur quadratum $b e$, quod quidem erit Rationale, cum linea $b c$, ex hypothesi sit Rationalis. Quoniam verò $b e$, & d , Rationalia sunt, erunt commensurabilia quadrato ex Rationali a , descripto, ut patet ex 9. defin. lib. huic, ac proinde & inter se commensura-

bilia. Est autem eadem ratio inter b et e , et e et d , quae inter e et c , hoc est, b et c , et c et d , per 1. propos. lib. 6. Quare b et c , c et d , sunt longitudine commensurabiles, ut docuit Clavius in scholio propos. 10. lib. huius. Igitur c et d , ipsi b et c , longitudine commensurabilis est: Sed et Rationalis, cum Rationali b et c , atque adeo Rationali proposita a , longitudine commensurabilis sit, ut Clavius tradidit in scholio 12. propos. lib. huius. Latitudo igitur c et d , Rationalis est, ipsique b et c , commensurabilis longitudine.

Igitur Rationale ad Rationalem applicatum, et c. Quod erat ostendendum.

LEMMA I. EX CLAVIO.

RECTA linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.

α ————— PLATE 112.

P O S S I T recta a , spatium Irrationale, hoc est, quadratum ex a , aequalē sit spatio cuiusdam Irrationali. Dico a , Irrationale esse. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationalē quoque, ut in demonstratione propos. 20. huius lib. ostensum est. Quod est absurdum. Ponitur enim Irrationale. Non ergo a , Rationalis est. Igitur Irrationale.

Hoc idem constat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potentes spatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

D U A S rectas Rationales potentia solū commensurabiles inuenire.

D V O genera sunt linearum Rationalium potentia tantum inter se commensurabilium: Aut, enim altera earum est equalis exposita Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus.

α ————— PLATE 7
 b ————— PLATE 7
 c ————— PLATE 12

S I T exposita Rationalis a , cui equalis sumatur b , Deinde ipsi b , inueniatur c , longitudine tantum incommensurabilis, seu (quod idem est) potentia tantum commensurabilis. Quoniam igitur b , c , ipsi a , commensurabiles sunt, (b , quidem, quod ei sit equalis; at c , ex constructione, quod inuenta sit potentia tantum commensurabilis ipsi b , atque adeo ipsi a ,) Rationales erunt b , et c : Sunt autem et potentia solū commensurabiles. Inuenta ergo sunt due Rationales b , c , potentia tantum commensurabiles, quarum altera nempe b , exposita Rationali a , equalis est.

Posterioris autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rursus exposita Rationalis a , cui longi-

α ————— PLATE 7
 b ————— PLATE 12
 c ————— PLATE 24

tudine tantum incommensurabilis inueniatur b , et huic rursum longitudine tantum incommensurabilis inueniatur c , ut illa invenientur.

rabilis c, maior aut minor quam a. Dico b,c, esse Rationales potentia tantum commensurabiles. Quod enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam a,c, ipsi b, potentia sunt commensurabiles; erunt & a,c, commensurabiles potentia, ut in scholio propos. 12. huius lib. demonstravimus. Quare cum utraque b,c, exposita Rationali a, sit potentia commensurabilis, erunt b,c, Rationales. Invenient ergo sunt b, & c, Rationales potentia tantum commensurabiles.

S C H O L I V M E X C L A V I O.

QVOD si inuenienda sint quocunque linea Rationes potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur, id hoc ratione.

Suntur per ea, que in scholio propos. 20. lib. 9. docuimus tot numeri primi, quot linea Rationes queruntur, nempe a, b, c, d. Deinde sumptat linea Rationali e, sua ut a, ad b, ita quadratum ex e, ad quadratum ex f, ut in coroll. propos. 6. hui-

a,	5	e	<u>R&B 5</u>
b,	7	f	<u>R&B 7</u>
c,	3	g	<u>R&B 3</u>
d,	2	h	<u>R&B 2</u>

ius lib. ostendimus. Item ut b, ad e, ita quadratum ex f, ad quadratum ex g, & denique ut c, ad d, ita quadratum ex g, ad quadratum ex h. Dico rectas e,f,g,h, Rationes esse, & potentia tantum commensurabiles inter se. Quod enim Rationes sint manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri a, b, c, d, (nempe quadratum ex e, ad quadratum ex f, ut numerus a, ad numerum b, ex constructione, similiterque quadratum ex f, ad quadratum ex g, ut b, ad c, & quadratum ex g, ad quadratum ex h, ut c, ad d.) At vero ex aequo quadratum ex e, ad quadratum ex g; ut a, ad c, Similiterque quadratum ex e, ad quadratum ex h, ut a, ad d, & denique quadratum ex f, ad quadratum ex h, ut b, ad d,) erunt ipsa inter se commensurabilia ac propter ea, & recte ipsa potentia sicutem commensurabiles. Existente ergo e, Rationali, erunt & reliqua f,g,h, Rationes. Quod autem potentia sunt tantum commensurabiles, ita ostendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis a,b,c,d, numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, ut ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum e,f,g,h, proportionem, quam numeri quadrati. Quare recte e,f,g,h, longitudine incommensurabiles sunt. Offense sunt autem Rationes, & potentia commensurabiles. Rationes igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.

Quod si propositis quocunque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenienda sit, adhuc alia, qua omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum, sicut id hoc modo. Sint proposita duo Rationes potentia tantum commensurabiles a, b, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus c, ad numerum d:

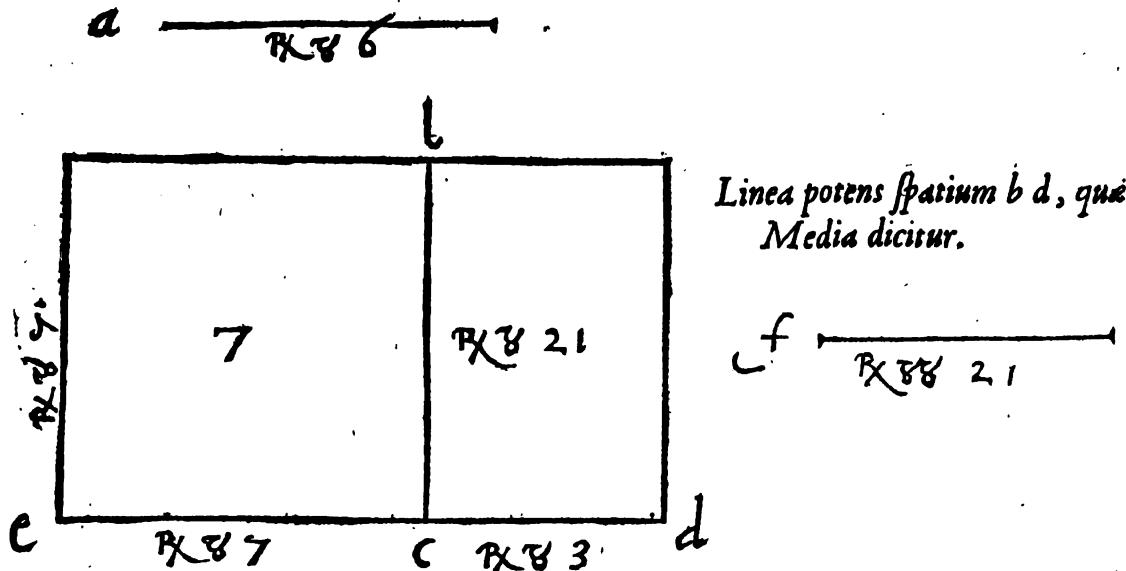
a	<u>R&B 10</u>	c,	10
b	<u>R&B 6</u>	d,	6
f	<u>R&B 7</u>	e,	7

Sumpio autem abo numero e, qui ad quemlibet ipsorum c,d, primus sit; (inuenientur autem huiusmodi numeri facile, si sumatur primus, qui neutrum ipsorum c,d, metiat) fiat ut d, ad e, ita quadratum linea b, ad quadratum linea f, per coroll. propos. 6. huius lib. Dico f, Rationalem esse, & ipsi a,b, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit, ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali b, sicutem potentia, cum quadrata rectarum b,f, proportionem habentia, quam numeri d,e, commensurabilia sint. Cum ergo proportio d, ad e, non sit qua numeri quadrati ad numerum quadratum, ut ad finem lib. 8. ostendimus; (quod d, & e, qui ambo non sunt quadrati, cum e, primus nullo modo quadrato sit, sint inter se primi, idcōque plani non similes, ac proinde ex iis, qua in scholio propos. 26. lib. 8. ostendimus, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum) erunt recta b,f, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erunt a, & f, potentia solum commensurabiles. Nam ex aequo erit quadratum ex a, ad quadratum ex f, ut c, numerus ad numerum e. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod ostendimus perinde, ut idem demonstravimus de numero d, & e,) erunt a,f, longitudine incommensurabiles, &c.

Theor.

Theor. 19. Propos. 22.

Quod sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur Rectangulum, Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.



EXPO N A T V R Rationalis a, arque rectangulum b d, contentum ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus. Dico rectangulum b d, esse Irrationale, & rectam cuius quadratum aequalē erit rectangulo b d, esse Irrationalem, que Media vocabitur.

Describatur ex altera illarum nimirum ex b c, quadratum b e, Igitur cum linea b c, sit Rationalis, erit & quadratum ex ea descriptum, Rationale, ut vult 8. defin. lib. huius.

Quoniam vero per 1. propos. lib. 6. est, ut e c, id est, b c, ad c d, ita b e, ad b d, Sint autem b c, & c d, incommensurabiles longitudine ex hypothesi, erit per ea, que docuit Clavius in scholio propos. 10. huius lib. quadratum b e, rectangulo b d, incommensurabile. Quare cum quadratum b e, quadrato ex a, Rationali descripto sit commensurabile, cum verae sint Rationalia, sic autem quadratum ex b e, rectangulo b d, incommensurabile, erit quoque quadratum ex Rationali exposita a, eidem rectangulo b d, incommensurabile, ut constat ex 14. propos. huius lib. Ac propterea rectangulum b d, incommensurabile existens quadrato Rationalis a, propriae, Irrationale est: ut constat ex 10. defin. lib. huius & recta potens Rectangulum illud, Irrationalis.

Hac autem linea nimirum f, appellabitur Media, que Rectangulum b d, poterit. Cum sit media proportionalis inter rectas b c, c d, Rationales potentia solum commensurabiles: Quadratum enim illius aequalē erit Rectangulo b d, sub rectis b c, c d, contento.

Igitur quod sub Rationalibus, & c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I V M C L A V I I .

IT A Q V E omnis linea Media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur. Cum enim eius quadratum aequalē sit rectangulo sub duabus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theore. n. 17. sexti. et ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsum, nempe media proportionalis inter duas Rationales linea Irrationalis, que Media appellatur. Ex quo lineam Medium facile describemus: si dicimus eam esse lineam Irrationalem, que medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles. Vel que potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contenitum. Nam sola hac linea, Media hoc loco appellatur.

Vt autem recte hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contenitum, Irrationale est vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipsum, vel rectangu-

L

lum illud, Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illorum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est, inter dictas Rationales. Nam si tres linea sint continuae proportionales, quales sunt b c, & recta Irrationalis, qua Media dicitur, & c d, erunt quoque rectilinea similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt eorum quadrata, proportionalia, ut in scholio propos. 22. lib. 6. demonstravimus. Quare quadratum ex Media descriptum, medium proportionale est inter quadrata rectarum b c, c d, id est Medium appellari potest.

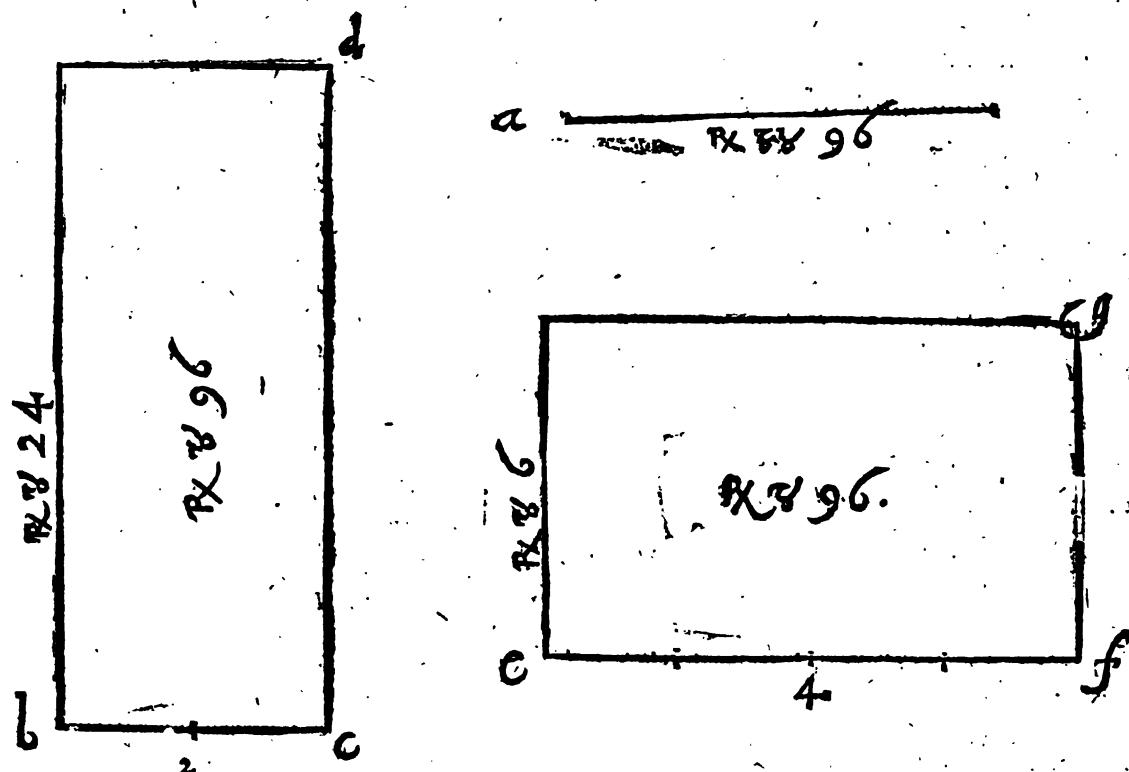
Hoc autem non ita intelligas, ut putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium b d, hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe Medis longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, ut ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocatur rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus concordum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum, sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus concentrum, Medium est, ut ostendimus: At non omne spatium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniversè tamen omne spatium Medium aequalē est alteri cuiusnam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

Vnde Medium describi sic poterit, ut dicamus, illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus concentrum: Vel certè rectangulum, quod alteri cuiusnam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehensa aequalē est, ita ut ipsum possit recta linea, que Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus renocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt due linea Rationales potentia tantum commensurabiles, ut in scholio sequentis theorematis ostendemus.

Theor. 20. Propos. 23.

Quod à Media fit, ad Rationale applicatum latitudinem efficit Rationale, &c. ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

SIT linea Media a, & b c, Rationalis, Appliceturque ad b c, Rationale, rectangulum aequale quadrato ex Media a, descripto, sitque b d, faciens latitudinem c d. Dico c d, esse Rationale, & eique Rationali b c, ad quam applicatum est longitudine incommensurabilem.



Cum enim a, Media fit, poterit illa rectangulum contentum sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus, alias non recte dici posset Media. Sit igitur Medium illud re-

Rectangulum e g, contentum sub duabus e f, f g, Rationalibus solum potentia inter se commensurabilibus. Igitur cum ex constructione a, possit rectangulum b d, erunt b d, e g, inter se aqualia, atque adeo et rectangula illa habebunt latera reciproca circa aequales angulos, nimis erit ut latus b c, ad e f, ita latus f g, ad c d, ut constat ex 14. propos. lib. 6. Ac propterea ut quadratum ex b c, ad quadratum ex e f, ita quadratum ex f g, ad quadratum ex c d, ut docet 21. propos. lib. 6. Sunt enim quatuor linea illae continuè proportionales, nimis b c, e f, f g, c d. Quadratum vero ex b c, commensurabile est quadrato ex e f, (cum ambæ ex hypothesi sint Rationales atque adeo et commensurabiles vel longitudine et potentia simul, vel potentia tantum.) Igitur quadratum ex f g, quadrato ex c d, commensurabile erit, ut docet 10. propos. huius lib. rectæ quoque f g, et c d, commensurabiles erunt saltæ potentia.

Quare cum f g, rationali b c, exposita sit commensurabilis, erit quoque c d, rationali exposita commensurabilis, ut Clavius docuit, in scholio 12. propos. lib. huius, ac propterea et c d, ex definitione Rationalis erit. Dico tamen eam esse longitudine incommensurabilem ipsi b c. Quoniam enim e f, f g, sunt Rationales potentia solum commensurabiles sitque ut e f, ad f g, ita quadratum ex e f, ad rectangulum e g, sub e f, f g, contentum ex lemmate 3. Clavius propos. 19. huius lib. erit quadratum ex e f, rectangulo ex e g, incommensurabile, atque adeo et rectangulo b d, huic aequali, ut vult 10. propos. lib. huius. Sed quadrato ex c d, commensurabile existit quadratum ex e f, (sunt enim ambæ Rationales, atque saltæ potentia commensurabiles.) Igitur cum quadrata illa sint inter se commensurabilia, rectangulum vero b d, quadrato ex e f, incommensurabile sit, erunt incommensurabilia inter se quadratum ex c d, et rectangulum b d, ut constat ex 13. propos. lib. huius. At vero ex lemmate 3. Clavius propos. 19. huius lib. quadratum ex c d, sic se habet ad rectangulum b d, ut recta c d, ad rectam b c. Igitur rectæ illæ c d, et b c, sunt longitudine incommensurabiles. Rationalis est ergo c d, et Rationali b c, longitudine incommensurabilis.

Quare quod à Media, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM CLAYII.

FACILIUS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad b c, rectangulum quadrato ex a, aequali, si ipsis b c, et a summa. ^{11. sexti.} tertia proportionalis pro latere c d. Cum enim b c, a, et c d, proportionales sint; ^{17. sexti.} erit rectangulum b d, sub extremis b c, et c d, contentum aequali quadrato medie proportionalis a.

Hac arte utendum erit et in sequentibus quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum aequali quadrato cuiuspiam linea rectæ. Porro ex hoc theoremate manifestum est, omne Medium, hoc est, spatium, quod linea Media potest, aequali esse eisdem alteri rectangulo concesso sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur aequali Rectangulum faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine linea Rationale incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio aequali, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum. Atque hoc modo quocunque Medium reduci poterit ad Medium contentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

Theor. 21. Propos. 24.

MEDIA commensurabilis, Media est.

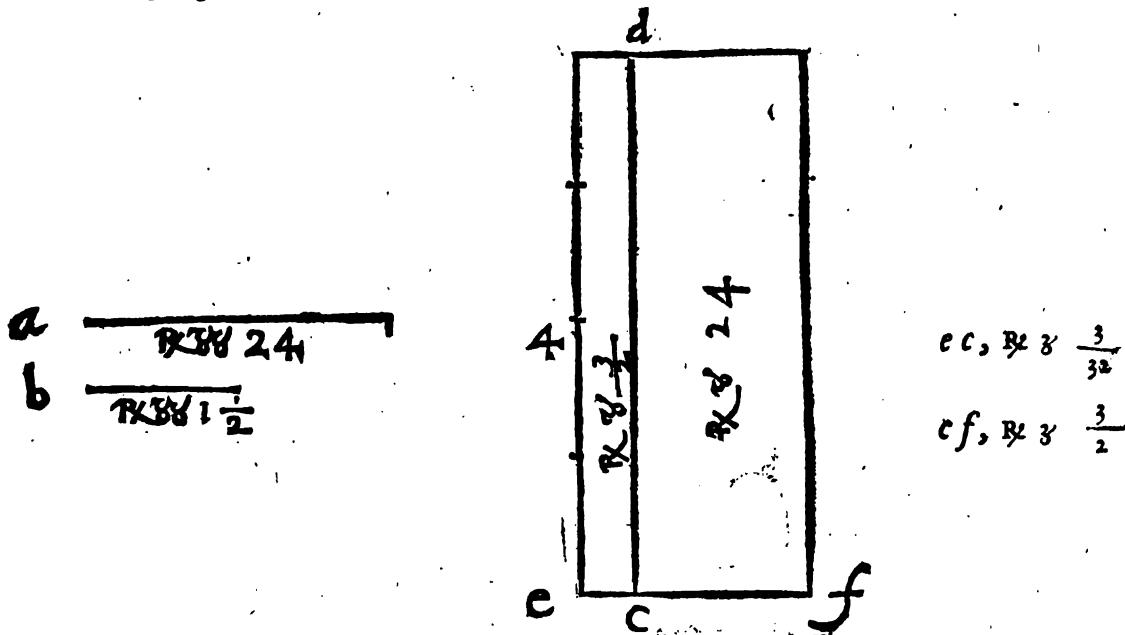
SIT recta b, Media a, commensurabilis sine longitudine et potentia simul, sine potentia tantum. Dico b, Medium esse.

$$\begin{array}{r} a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} PK 88 24 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} PK 88 1 \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

E V C L I D I S

EXPO N A T V R Rationalis c d, ad quam applicatum sit rectangulum aequale quadrato ex a, descripto, sive rectangulum d f.



I G I T V R cum rectangulum d f, quod est medium ad Rationalem sit applicatum, efficiet latitudinem rationalem nempe e f, ipsique Rationali longitudine incommensurabilem, ut constat ex 23. propos. huius lib. Rursus ad Rationalem c d, applicetur rectangulum d e, aequale quadrato ex b.

Quoniam vero recta a, et b, ponuntur commensurabiles, erunt et earum quadrata, hoc est, rectangula illis aequalia d f, d e, commensurabilia. Atque ex 1. sexti est, ut d f, ad d e, ita linea f c, ad c e, Rectangula autem illa sunt commensurabilia, Igitur et rectae illae commensurabiles, ut vult 10. propos. lib. huius.

Iam vero recta f c, Rationalis est ostensa, ipsique Rationali exposita c d, longitudine incommensurabilis: Igitur et c e, eidem c d, etiam longitudine incommensurabilis erit per 14. propos. huius lib.

Cum autem Rationalis sit, quia Rationali exposita c d, est commensurabilis (nam cum f c, c e, sint longitudine ostensa commensurabiles et f c, ipsi c d, saltem potentia commensurabilis, cum sit Rationalis, erit et c e, eidem c d, etiam saltem commensurabilis potentia, ut Clavius docuit in scholio propos. 12. huius lib.) erunt igitur c d, c e, Rationales potentia solum inter se commensurabiles, atque adeo recta b, potens spatiū rectanguli d e, sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum, nimirum sub c d, c e, Media est, ut constat ex 22. propos. lib. huius.

Media igitur commensurabilis, et c. Quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I V M C L A V I I .

Ex hoc manifestum est, spatiū Medio spatio commensurabile, Medium esse. Postquam enim demonstrari est d f, commensurabile esse Medio d e, ostensum ex eo mox fuit d f, esse quoque Medium nimirum, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus c d, e f, contentum. Eadēque ratio est in ceteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

Sit spatiū d f, spatio Medio d e, commensurabile. Dico et d f, Medium esse. Posset enim a, Media ipsum d f, Medium (nam cum d f, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, ut in scholio propos. 22. huius lib. tradidimus) & b, ipsum d e, Quoniam igitur d e, d f, commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex a, b, ipsis aequalia commensurabilia. Quare a, b, rectæ potentia saltem sunt commensurabiles;

Atque

Atque idcirco existente a, Media, erit & b, illi commensurabilis, Media, vt in hoc theoremate ostensum est: Igitur & d f, Medium erit. Omne enim spatum, quod potest Media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.

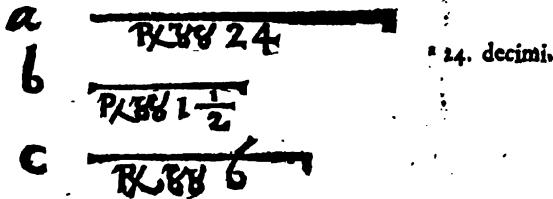
LEMMA I.

Q V E M A D M O D V M autem in Lemmate primo propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Media longitudine commensurabilem, dici Mediā, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia. Uniuersè enim qua longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si vero recta quedam linea Media potentia fuerit commensurabilis, siquidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Media rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEMMA II.

DVAS Rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.

S I T Media aliqua linea a, cui s̄ inueniantur due recta commensurabiles b, c, illa quidem longitudine, hec vero potentia tantum; erit utraque b, c, Media a, commensurabilis, Media. Cūmergo a, b, sint longitudine commensurabiles; & a, c, potentia tantum; erunt inuenta a, b, Media longitudine commensurabiles; & a, c, Media potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.

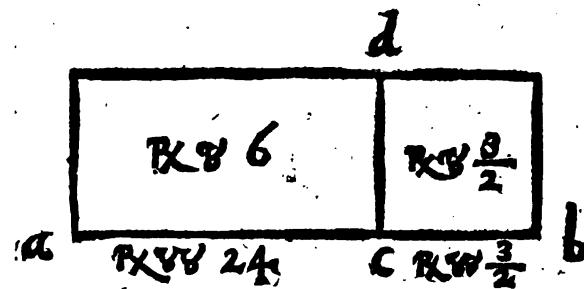


SCHOLIVM CLAVII.

Q V A M V I S omnis linea recta Media commensurabilis, Media sit, non tamen omnis Media cuilibet Media est commensurabilis; cūm due Media dari possint prorsus incommensurabiles longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius libri apparet. Vbi etiam docebimus, quānam via inueniēdūt sint due Mediae longitudine, & potentia incommensurabiles.

Theor. 22. Propos. 25.

Q V O D sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis lincis continetur rectangulum, Medium est.



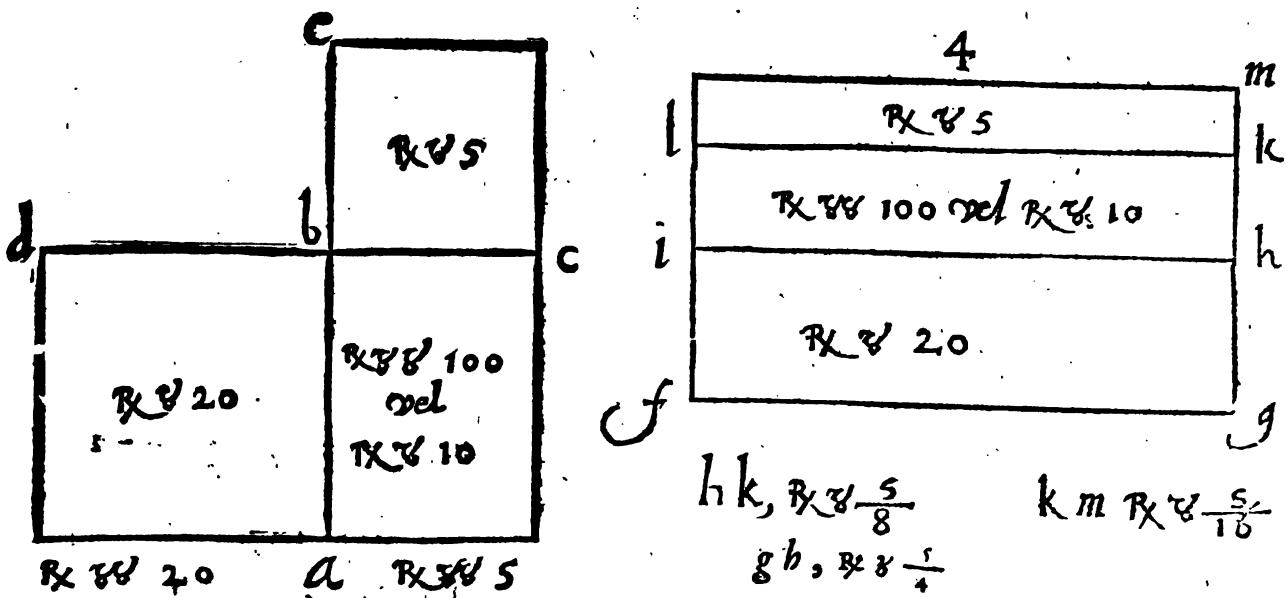
C O N T I N E A T V R rectangulum a d, sub duabus Mediis longitudine inter se commensurabilibus. Dico rectangulum a d, esse Medium, describatur ex Media c d, quadratum b d, quod Medium erit. Hoc facto, cūm sit per 1. propos. lib. 6. vt a c, ad c b, ita rectangulum a d, ad quadratum b d, Sint autem ex hypothesi Mediae a c, & d c, commensurabiles longitudine, Igitur & spatia a d, d b, commensurabilia erunt. Quare cūm spatum a d, spatio d b, sit commensurabile, Medium erit a d, per ea, que tradita sunt à Clasio in coroll. propos. antecedentis.

Quod ergo sub Mediis, & c. Quod erat demonstrandum.

M

Theor. 23. Propos. 26

Quod sub Mediis potentia tantum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.



SIT rectangulum a c, contentum sub duabus Mediis a b, b c, quæ tantum potentia sunt commensurabiles. Dico rectangulum a c, esse vel Rationale, vel Medium. Ex a b, b c, describantur quadrata a d, c e, que Media erunt ex scholio Clauij propos. 22. lib. huius. Sunt enim ex hypothesi a b, b c, Mediae. Deinde exponatur Rationalis f g, ad quam applicetur rectangulum f h, quadrato a d, æquale ex Media a b, descripto, & ad h i, que Rationali f g, æqualis est, aliud rectangulum sit applicatum æquale rectangulo a c, sive illud i k: denique ad l k, quæ etiam æqualis est Rationali propositæ f g, aliud rectangulum applicetur æquale quadrato c e, sive l m, erit ideo totum f m, unum rectangulum: vt docuit Clavius propos. 45. lib. 1. Quoniam vero quadrata a d, c e, Media sunt ostensa, erunt eorum rectangula f h, l m, illis æqualia, Media. Sunt autem Media illa ad Rationales f g, & l k applicata, faciuntque latitudines g h, k m, Igitur erunt rectæ g h, k m, Rationales ipsique Rationali f g, longitudine incommensurabiles, vt vult propos. 23. lib. huius. Quoniam vero ex hypothesi a b, b c, sunt commensurabiles potentia, erunt eorum quadrata commensurabilia, atque adeò eorum rectangula f h, l m, illis æqualia. Est autem per 1. sexti, vt f h, ad l m, sic rectæ g h, ad rectam k m. Quare rectæ g h, & k m, commensurabiles sunt. Iam etiam Rationales sunt ostensa g h, k m: Rationales igitur sunt eorum longitudine commensurabiles. Sed Rationali expositæ f g, solum potentia commensurabiles, ac propterea rectangulum sub ipsis g h, k m, Rationale, vt constat ex 20. propos. lib. huius.

Quoniam vero est, vt d b, ad b c, ita a b, ad b e, (sunt enim d b, b c, ipsis a b, b e æquales) & vt d b, ad b c, ita a d, ad a c, per 1. propos. lib. 6. & vt a b, ad b e, ita a c, ad c e, atque adeò a d, a c, c e, proportionalia erant, illisque æqualia rectangula f h, h l, l m, erunt quoque proportionalia. Eandem autem proportionem inter se habent rectæ g h, h k, k m. quæcum rectangula f h, h l, l m, per 1. propos. lib. 6. Igitur rectæ g h, h k, k m, proportionales sunt. Atque ideo rectangulum sub g h, & k m, quadrato ex h k æquale per 17. propos. lib. 6. Sed rectangulum contentum sub illis duabus rectis g h, k m, ostensum est Rationale: Quare quadratum ex h k, descriptum erit Rationale. Ac propterea eorum recta h k. Rationalis, Rationalisque f g, expositæ vel longitu-

dine & potentia simul, vel potentia tantum commensurabilis ex 6. defin. lib. huius. Siquidem recta b k , recta h i , quae Rationati f g , est aequalis longitudo commensurabilis existit, rectangle sub illis duabus contentum, erit Rationale per 20. lib. huius, atque adeo & rectangle sub illis duabus contentum, atque adeo & a c , huic aequalis Medium ex 22. propos. lib. huius. Est ergo rectangle sub illis duabus Medii potentia solum commensurabilibus contentum, vel Rationale, vel Medium. Quare quod sub Medio, &c. Quod era ostendendum.

S C H O L I V M C L A V I I .

F A C I L I V S. quam ex 45. propos. lib. i. applicabimus ad b i , rectangle ipso a c , aequali, si tribus rectis b i , a b , b c , quae proportionalis sumatur pro latere b k . Nam rectangle sub extremis b i , b k , aequali erit rectangle sub Medio a b , b c . ^a 12. sexti. ^b 16. sexti.

Hac eadem arte utem in sequentibus quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangle aequali alteri rectangle.

Quoniam vero in hoc theoremate demonstratur rectangle, contentum sub duabus rectis Medii potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium, docebit Euclides propos. 28. quoniam ratione inveniente sint due Mediae potentia tantum commensurabilibus, que Rationale comprehendant. Propos. vero 29. duas. Medias potentia solum commensurabilibus inquirat, que spatium Medium contineant.

Itaque habemus ex his, ^c rectangle contentum sub duabus Rationalibus longitudo commensurabilibus esse Rationale; ^d ^e 20. decima. Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum rectangle, esse Irrationale, appellarique Medium, & rectam qua ipsum potest Medium. Rursus ex demonstratis constat, ^c rectangle comprehensum sub duabus Medii longitudo commensurabilibus, esse Medium. Rectangle autem sub duabus Medii potentia solum commensurabilibus comprehensum, esse vel Rationale, vel Medium. Quod si quis roget, qualenam rectangle sit illud, quod sub duabus Medii longitudo, & potentia incommensurabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituer, nempe aequali esse rectangle, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, que Media appellatur.

Sit enim rectangle a c , comprehensum sub duabus Medii a b , b c , longitude & potentia incommensurabilibus. Dico a c , neque Rationale esse, neque Medium, &c. Constructis enim eisdem, ut in theoremate, ostendemus similiter, rectas g b , k m , Rationales esse, & ipsi f g , longitude incommensurabilis. Et quia recta a b , b c , ponuntur incommensurabilis longitude & potentia, erunt & carna quadrata a d , c e , atque adeo ipsis aquadria rectangle f b , l , m , incommensurabilis. ^f Vt aequali f b , ad l , m , ^g 1. sexti. ita est recta g b , ad rectangle k m . ^h Igitur recta g b , k m , longitude inter se sunt incommensurabilis. Quare g b , k m , offensae ^b 10. decimi. Rationales, sunt potentia tantum inter se commensurabilis. ⁱ Ac properea rectangle sub ipsis g b , k m , Irrationale est, ^j 22. decimi. quod Medium appellatur, & recta ipsum potens Irrationalis, que dicuntur Media. ^k Potest autem rectangle sub ipsis g b , k m , recta h k ; (Nam ut prius ostendemus, tres g b , b k , k m , esse proportionales.) Igitur h k , Irrationalis est, & Media. Quare i k , ^l 1. decimi. Rationale non est, si enim Rationale esset, faceret ipsum ad Rationalem b i , applicandum latitudinem b k , Rationalem, & ipsi b i , longitude commensurabilem. Quod est absurdum, offensa enim est b k , Irrationalis, ac Media. Eodem modo nego i k , Medium est, si enim esset Medium ^m faceret ipsum applicatum ad Rationalem b i , latitudinem b k , Rationalem, & ipsi b i , longitude incommensurabilem. Quod est absurdum, offensa est enim b k , Irrationalis, & Media. Itaque cum i k , neque Rationale sit, neque Medium; necessario neque a c , illi aequali, Rationale erit, neque Medium, sed tertium quoddam genus constituer, nempe aequali erit ipsi i k , quod sub Rationali, & Media continetur, cum b i , Rationale sit, & b k , offensae Media. Ex quibus efficitur, rectangle, que potest spatium sub duabus Medii longitude & potentia incommensurabilibus, quales ponuntur a b , b c , comprehensum, posse quoque rectangle sub Rationali, & Irrationali, que Media vocatur, contentum. Quod est propositum.

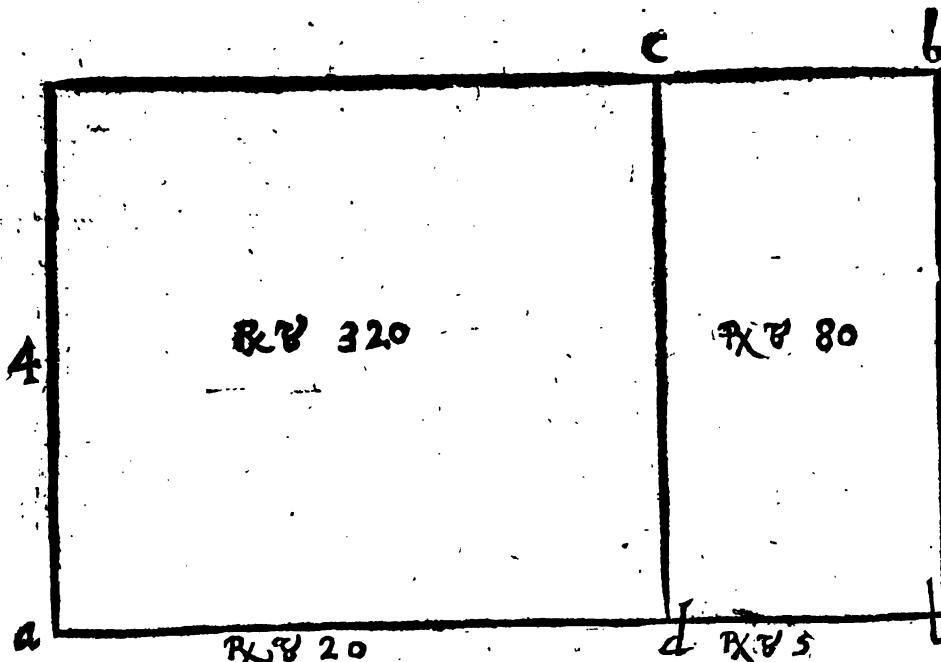
Theor. 24. Propos. 27.

M E D I V M non superat Medium Rationali.

S V P E R E T Medium a b , Medium a c , rectangle d b , Dico d b , Medium esse, non Rationale. Quod si aliter contingere posset, sit rectangle d b , Rationale: Exposita deinde sit Rationale linea e f , & ad ipsam applicetur rectangle e g , Medio a b , aequali, & medio a c , rectangle e h , aequali; ita ut reliquum h i , Rationali d b , aequali existens, Rationale sit. Igitur cum rectangle e g , e h , que Media sunt ad Rationalem sint applicata, efficient latitudes f h , h g , Rationales, ipsique Rationali exposita longitude prorsus incommensurabilis, ut constat ex 23. propos. lib. huius. Cum autem Rationale h i , applicatum sit ad Rationalem e f , vel h k , que illi est equalis, erit recta h g , Rationalis eique Rationali longitude commensurabilis per 21. propos. lib. huius.

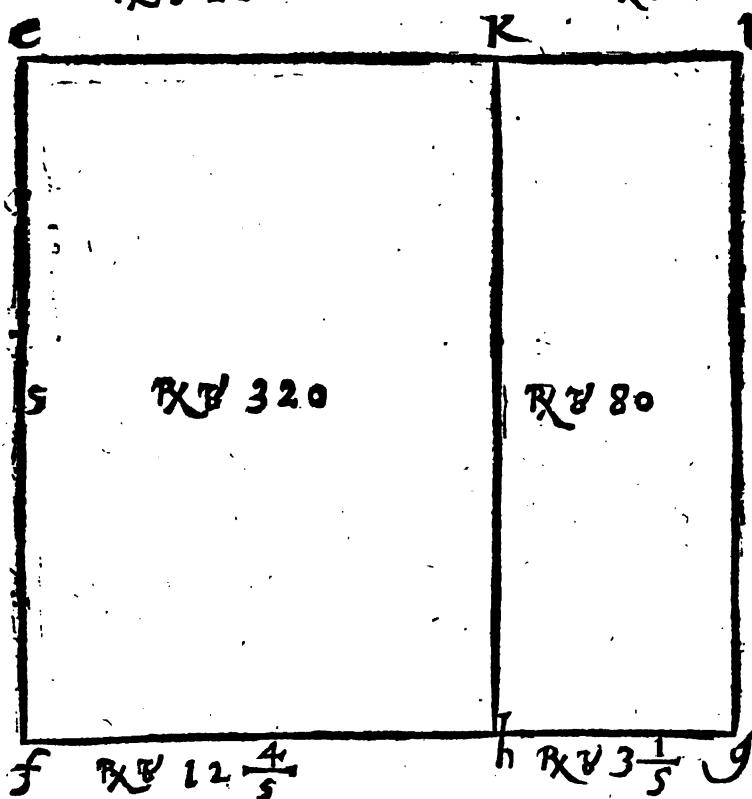
Rectangulum
a b, Bz 3 72°

Linea a l, Bz 3 45



Rectangulum
e g, Bz 3 72°

linea f g, Bz 3 28 $\frac{4}{5}$



QVARE cum h g, e f, sint longitudine commensurabiles e f, verò ipsi f h, longitudine incommensurabilis, ut iam fuit demonstratum erit e h g, eidem f h, longitudine incommensurabilis, ut constat ex 14. propos. huius lib. Est autem ut f h, ad h g, ita quadratum ex f h, ad rectangulum sub f h, h g, per 3. lemma Clavi propos. 19. huius lib. Quare quadratum ex f h, rectangulo sub f h, h g, contento erit incommensurabile. At quadrato f h, commensurabile est quadratum ex h g, (sunt enim ambo ex Rationalibus lineis descripta) atque adeò e quadrata ex f h, h g, simul quadrato ex f h, commensurabile, ut docet 16. propos. lib. huius, et rectangulo sub f h, h g, contento commensurabile est id quod bis sub f h, h g, continetur, cum hoc illius duplum existat, ergo per ea, quae à Clavio tradita sunt in scholio propos. 14. huius lib. quadrata ex f h, h g, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub f h, h g, bis comprehenso, ex 17. decimi. Quo-

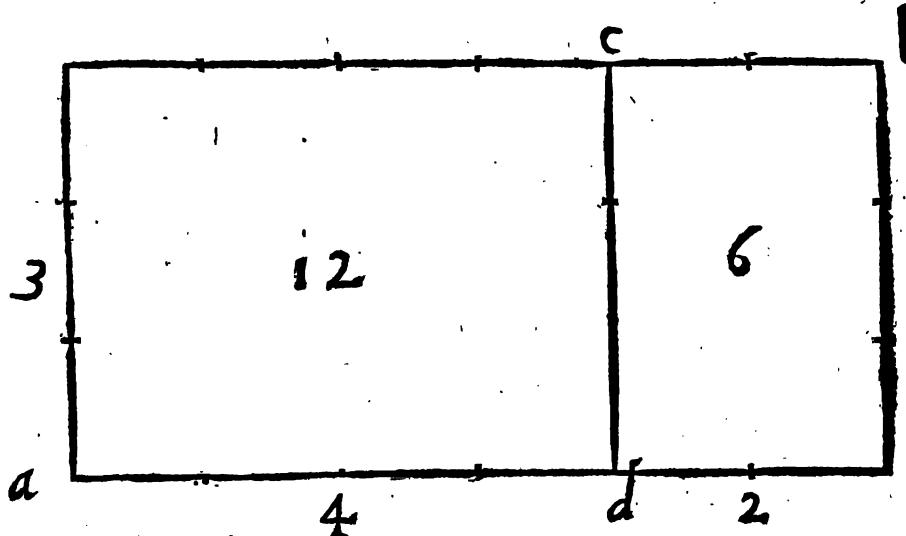
circa compositum ex rectarum quadratis $f h, h g$, & ex rectangulo bis sub $f h, h g$, incommensurabile est composite ex quadratis rectarum $f h, h g$. Quadratus autem ex $f h, h g$, vna cum rectangulo bis sub $f h, h g$, equatur quadratum ex $f g$, vt constat ex 4. propos. lib. 2. Quare quadratum ex $f g$, composite ex rectarum quadratis $f b, h g$, incommensurabile est: Est autem composite illud Rationale, per ea, que lemmate 4. propositionis 19. huius lib. tradidit Clavius. Cum iam quadrato Rationali ex tota $f h$, descripto ostensum sit commensurabile. Igitur cum huic composite, quod Rationale existit, quadratum ex $f g$, incommensurabile sit, erit quadratum ex $f g$, Irrationale, vt. vult 10. defin. lib. huius, atque adeo ex recta $f g$, Irrationalis. Quod absurdum: Iam enim ostensa est Rationalis, ipsique, e f. Rationali expositae longitudine tantum incommensurabilis. Quare rectangulum d b, quo Medium a b, Medium a c, superat non est Rationale.

Igitur Medium non superat, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM EX CLAVIO.

¶ EX dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat Rationale Rationali.



RATIONALE enim a b, superet Rationale a c, spatio d b. Dico d b, quoque esse Rationale. Quoniam enim a b, a c, Rationalia sunt; ergo a b, a c, commensurabilia quadrato Rationis exposita; atque adeo & inter se commensurabilia. Quare cum totum a b, composite ex a c, d b, commensurabile sit ipsi a c, erit quoque idem a b, reliquo d b, commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem a b, Rationale. Igitur & d b, ex lemmate 4. propos. 19. huius libri Rationale est. Quod est propositionem.

Probl. 4. Propos. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

SVMANTVR per ea, que Clavius tradidit lemmate 2. propos. 21. lib. huius, duæ rectæ Rationales, quæ tantum inter se sint commensurabiles potentia, sive illæ a, & b, inter quas sumatur media proportionalis c, sicutque vt a, ad b, ita c, ad d. Dico c, & d, esse Medias, quæ tantum potentia commensurantur, & quæ Rationale comprehendunt. Nam cum a, & b, ex hypothesi Rationales sint, & solùm potentia commensurabiles, erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur, per 22. propos. huius lib. atque adeo cum recta c,

N

EVCLIDIS

possit rectangulum illud erit c, Media: Sed quoniam est ut a, ad b, ita c, ad d, cum quatuor illae sint continue proportionales ex constructione, siveque a, & b, solum commensurabiles potentia, erunt & c, & d, etiam potentia tantum commensurabiles ut demonstrauit Clavius in scholio

a	<u>3</u>
c	<u>RKB 54</u>
b	<u>RKB 6</u>
d	<u>RKB 24</u>

propos. 10. lib. huius. Quare & d, ipsi Mediae c, commensurabilis, Media est ex 24. propos. huius lib. Inuentae sunt igitur due Mediae, quae tantum potentia commensurari possunt. Dico & eas Rationale continere. Quoniam enim est, ut a, ad b, ita c, ad d, & permutando ut a, ad c, ita b, ad d, ut autem a, ad c, ita c, ad b, erit quoque ut c, ad b, ita b, ad d. Ideoque b, est Media proportionalis inter c, & d, poteritque rectangulum sub illis contentum, per 17. propos. lib. 6. Sed quadratum ex b, linea, quae per hypothesin Rationalis est, Rationale existit. Igitur rectangulum sub c, & d, contentum huic quadrato aequaliter, Rationale est. Quare Medias inuenimus nimis c, & d, potentia solum commensurabiles, quae Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

Probl. 5. Propos. 29.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles quae Medium continent.

SV MANTVR per ea, quae Clavius tradidit in scholia propos. 21. lib. huius, tres Rationales nimis a, b, c, quae sunt inter se commensurabiles potentia: Deinde inter a, & b, media proportionalis d, inueniatur. Postremo fiat ut b, ad c, ita d, ad e. Dico d, & e, Medias esse potentia solum commensurabiles, Mediumque continent. Nam cum a, & b, ex hypothesi sint Rationales, & commensurabiles tantum potentia, erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale & Medium, quadratumque ex Media d, illi aequaliter, Medium, ut vult 22. propos. lib. huius.

a	<u>RKB 5</u>
d	<u>RKB 50</u>
b	<u>RKB 10</u>
c	<u>RKB 7</u>
e	<u>RKB 24 $\frac{1}{2}$</u>

QVONIAM verè est ut b, ad c, ita d, ad e, sunt autem b, & c, Rationales, & tantum inter se potentia commensurabiles, erunt quoque d, & e, potentia solum commensurabiles, ut in

ELEMENTVM DECIMVM.

51

Scholio propos. 10. lib. huius Clavius docuit. Cum autem d, Media sit, erit & e, illi commensurabilis potentia, Media, per 24. propos. huius lib. arque adeo d, & e, Mediae, sunt commensurabiles tantum potentia. Iam dico eas Medium continere. Cum enim ex constructione sit ut b, ad c, ita d, ad e, permutoque ut b, ad d, ita c, ad e, ut autem b, ad d, ita d, ad a, erit quoque ut d, ad a, ita c, ad e, atque rectangulum sub d, & e, aequale est rectangulo contento sub a, & c, per 16. propos. lib. 6. Sed quod sub a, & c, continetur rectangulum, est Irrationale & Medium ex 22. propos. lib. huius. Igitur & rectangulum sub d, & e, illi aequale, Medium. Medias igitur invenimus nimirum d, & e, potentia commensurabiles Medium comprehendentes. Quod erat faciem.

SCHOLIVM I. EX CLAVIO.

IN iis que sequuntur indigemus hoc Problemate.

Duos numeros planos similes inuenire.

SUMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales a, b, c, d, ut quidem a, ad c, ita b, ad d. Multiplicantes autem se mutuo a, & b, faciant e, Item c, & d, se multiplicantes faciant f. Erunt ergo e, & f, numeri plani similes, quandoquidem latera habent proportionalia, ut ex constructione est manifestum.

a, 6	c, 12
b, 4	d, 8
e, 24	f, 96

Quoniam autem in lib. 9. ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem ^{a 28. & 29.} vero, si impar multiplicet imparem, perficuum est, quoniam modo inueniri possint duo plani similes, quorum uterque par sit, vel noni. impar; vel unus quidem par, alter vero impar. Si enim latera sumpta sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si unus latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horum vero par. Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat unum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.

LEMMA I. EX CLAVIO.

Duos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTVR per ea, que in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes. a b, & c, quorum uterque vel par sit, vel impar. ^{b 24. & 26.} Et quoniam sine a pari par auferatur sine ab impari impar, reliquo ^{c 1. noni.} pars est; detracto b d, ex a b, qui aequalis sit ipse c, erit reliqua a d, par. Quod divisio bifariam in

$$a \dots \dots c \dots \dots d \dots \dots b \\ c \dots \dots$$

e; Dico numerum factum ex a b, in b d, qui quidem quadratus est, ^{c 1. noni.} compositum cum quadrato numeri e d, facere quadratum.

Quoniam enim numerus a d, bifariam est divisus in e, & ei additus d b, erit ex 6. theoremate eorum, que ad propos. 14. lib. 9. demonstravimus, numerus qui fit ex a b, in b d, unde cum quadrato numeri d e, aequalis quadrato numeri e b. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex a b, in b d, & quadratus numeri d e, compositi faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex b e, dignitur. Quod est propositum.

COROLLARIVM.

Ex his manifestum est, quando a b, & c, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum b e, c d, quorum excessus, nimirum numerus ex a b, in b d, factus, etiam numerus quadratus sit.

Quod si numeri sumantur a b, & c, non similes, uterque tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum b e, c d, quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex a b, in b d, non est quadratus. Si enim quadratus esset, numeri a b, b d, hoc est a b, & c, plani similes essent. Quod est absurdum ponuntur enim non similes.

SCHOLIVM II.

ITAQVE si inveniamur inuenire duos quadratos numeros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sumemus ut prius, duos planos similes, quorum uterque par, vel impar sit, nempe a b, & c, & reliqua perficiemus, ut in proximo lemmate

EVCLIDIS

a..... c..... d..... b
c.....

Si vero inueniendi sunt duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: Sumendi erunt duo numeri plani a b, & c, non similes, quorum uterque par sit vel impar, & reliqua peragenda, ut prius. Nam similiter ostendimus quadratum ex b c, aequalis esse quadrato ex d e, unde cum eo, qui ex a b, in b d, sit: Quare excessus

a... c... d.... b
c.....

quadratorum ex b c, & d, est numerus factus ex a b, in b d, qui cum non sit quadratus, (si enim esset quadratus, esset a b, b d, plani similes, quod non ponitur) constat propositum.

Hoc posterius facilius absolvemus, si quemcumque quadratum numerum dividamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Ut si quadratus 36. dividatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. dividatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de ceteris.

LEMMA II.

Duos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

SINT duo numeri plani similes a b, & c, pares, vel impares, ut in lemmate precedenti, si atque ea

a... b... i... e... f... g... d..... b
c.....

dem constructio, ita ut rursus quadratus, qui sit ex multiplicatione similius numerorum a b, d b, inter se, una cum quadrato ex d e, equalis

fit quadrato ex b c. Aferatur deinde ex d e, unitas e f. Erit ergo quadratus ex d f, minor quadrato ex d e, quod & latus d f, lateri d e, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex a b, in b d, alter vero ex d f, in se fit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex b f, vel equalis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex b f, ac propterea latus ipsius minus latere b f. Erit ergo latus ipsius vel aequalis numero b e, vel maius. (minus enim non erit, quoniam inter numeros b e, b f, sola unitate inter se distantia nullus medius est numerus, ne unitas ipsa secetur: Eset autem dictum latus inter ipsos medium si minus ponatur, quam b f, minus vero quam b e.) Si dicatur aequalis, ita ut quadrato ex b e, equalis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui sit ex a b, in b d, & ex quadrato numeri d f, cum eidem quadrato ex b e, sit ostensus in precedenti lemmate equalis numerus, qui sit ex a b, in b d, una cum quadrato ex d e, erit, qui sit ex a b, in b d, una cum quadrato ex d f, equalis ei, qui sit ex a b, in b d, una cum quadrato ex d e, Ablato ergo communis, eo scilicet, qui sit ex a b, in b d, erit reliquus quadratus ex d f, equalis reliquo quadrato ex d e, Ideoque & latus d f, lateri d e, aequalis pars toti. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex a b, in b d, alter vero ex d f, in se fit, aequalis est numero b e, Sed neque maius. Sit enim si fieri potest, latus illius aequalis numero b i, qui maior sit, quam b e, ita ut quadrato ex b i, equalis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex b i, latere maiore, maior est quadrato ex b e, latere minore: erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex a b, in b d, alter vero ex d f, in se fit. (cum hic compositus equalis ponatur quadrato ex b i) maior quadrato ex b e, Est autem quadrato ex b e, ostensus in lemmate precedentis equalis numerus, qui sit ex a b, in b d, una cum quadrato ex d e, Ablato ergo communis, qui sit ex a b, in b d, erit reliquus quadratus ex d f, reliquo quadrato ex d e, maior; ac proinde latus d f, lateri d e, maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter sit ex a b, in b d, alter vero ex d f, in se, maius est latere b e. Sed neque aequalis, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus maior est quadrato ex b f.

Sit iam, si fieri potest, numerus qui sit ex a b, in b d, una cum quadrato ex d f, equalis quadrato ex b f, & ponatur numerus a b, duplus unitatis e f. Quia igitur totus a d, totius e d, duplus est, (divisus enim est a d, in e, bifarium) & ablatus a b, ablate unitatis e f, erit & reliquus b d, reliqui f d, duplus, ex iis, que ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque ideo b d, in f, bifarium dividitur. Quare ex 6. theoremate eorum, que ad propos. 14. lib. 9. demonstravimus, erit numerus, qui sit ex b b, in b d, una cum

$a \dots b \dots i \dots e \dots f \dots g \dots d \dots \dots \dots b$

cum quadrato ex df , equalis quadrato ex $b f$. Sed eidem quadrato ex $b f$, equalis ponitur numerus, qui fit ex $a b, in b d$, una cum quadrato ex df .

Igitur qui fit ex $hb, in bd$, una cum quadrato ex df , equalis est ei, qui fit ex $a b, in b d$, una cum quadrato ex df ; Et detraicto communi quadrato ex df , relinquetur, qui fit ex $hb, in bd$, ei qui fit ex $a b, in b d$, equalis. Quare cum hb, ab , multiplicantes eundem $b d$, producant aequales numeros; ^{haec} 18. septimi. beant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit $hb, ipsi ab$, equalis, pars toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex $a b, in b d$, una cum quadrato ex df , quadrato ex $b f$, equalis.

Sit tandem si potest fieri, numerus qui ex $a b, in b d$, una cum quadrato ex df , minor quadrato ex $b f$, ac propterea ex latere $b f$, minus, quod sit bg , ita ut qui ex $a b, in b d$, una cum quadrato ex df , equalis sit quadrato ex bg . Sumatur autem ipsius eg , duplus a i . Quoniam igitur totus $a d$, totius fd , duplus est; et ablati $a i$, ablati eg , erit rursus ex reliquo $i d$, reliqui gd , duplus; ac propterea $i d, in g$, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theoremate b , eorum, que ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus, qui fit ex $i b, in b d$, una cum quadrato ex dg , equalis quadrato ex bg : Ponitur autem eidem quadrato ex bg , equalis, qui fit ex $a b, in b d$, una cum quadrato ex df , Igitur qui fit ex $i b, in b d$, una cum quadrato ex dg , equalis est ei, qui ex $a b, in b d$, una cum quadrato ex df . Ablatis igitur quadratis ex dg , ex df , quorum qui ex dg , minor est, remanebit qui ex $i b, in b d$, maior eo, qui ex $a b, in b d$, pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo qui ex $a b, in b d$, una cum quadrato ex df , minor quadrato ex $b f$. Sed neque maior est ostensus, neque equalis. Non igitur quadratus est, qui ex $a b, in b d$, una cum quadrato ex df . Quod est propositum.

S C H O L I V M III.

EX hoc facile inueniemus duos numeros, ita ut ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum.

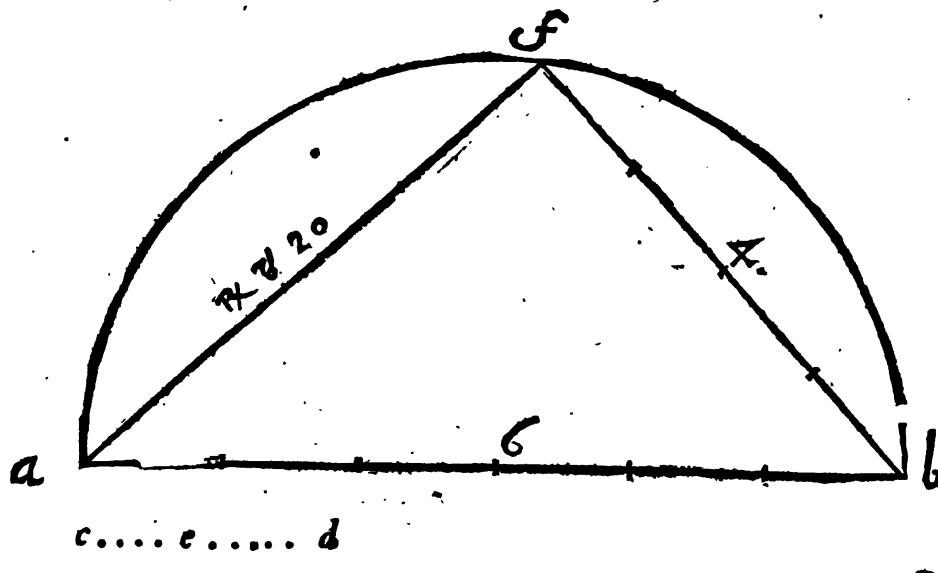
Si enim per lemma precedens inueniantur duo quadrati, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

Idem obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos divisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

Probl. 6. Propos. 30.

I N V E N I R E duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut major, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

EXPONATVR Rationalis linea $a b$, Inuenianturque per ea, que à Claudio tra-



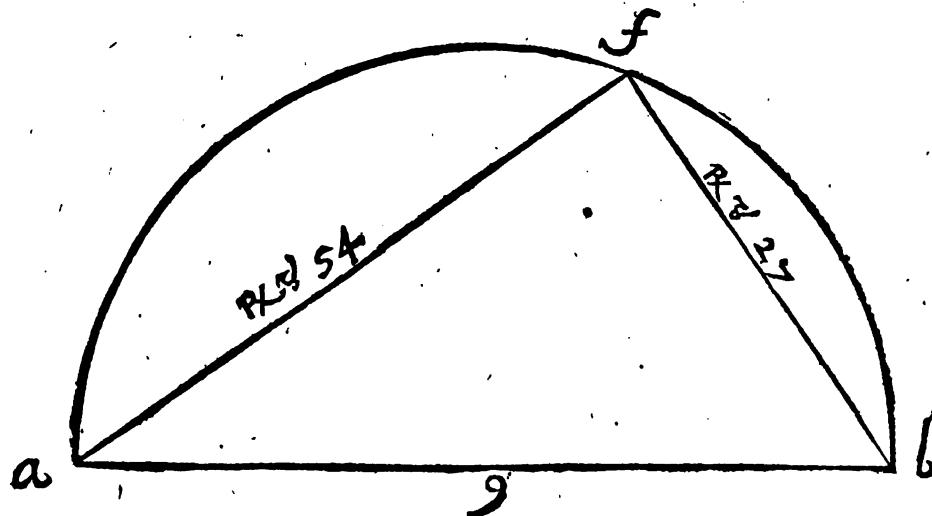
dita fuere in scholio 2. antecedentis propos. duo numeri quadrati nimirum c d, c e, quorum excessus d e, quadratus non sit. Deinde per coroll. Clavi propos. 6. lib. huius, fiat ut c d, numerus ad numerum d e. Ita quadratum ex a b, ad aliud quadratum nimirum ad id quod ex a f. Accommodeturque a f, in semicirculo a b f, circa diametrum a b, descripto, ac denique recta f b, connectatur. Igitur cum angulus f, in semicirculo sit rectus erit quadratum a b, aequalē quadratis ex a f, f b, descriptis per 47. lib. 1. ac propterea recta a b, plus potest, quam a f, quadrato recta f b. Quoniam verò quadratum ex a b, ad quadratum ex a f, est ut numerus c d, ad numerum d e, erunt quadrata ex a b, et a f, descripta, commensurabilia, ut constat ex 6. propos. lib. huius, quadratumque ex a f, Rationale erit, cum quadratum ex a b, linea Rationali descriptum, Rationale sit, ac proinde recta a f, Rationalis, Rationales sunt igitur a b, a f, et saltem potentia commensurabiles. Quoniam enim quadratum ex a b, ad quadratum ex a f, non habet rationem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum (cum neque quadratus numerus c d, ad d e, non quadratum eam rationem possit habere, alias et d e, quadratus existeret, quod non ponitur) erunt ex 9. propos. lib. huius rectae a b, a f, incommensurabiles longitudine: Sunt autem commensurabiles potentia. Igitur a b, a f, Rationales sunt, et solum inter se potentia commensurantur.

Nunc autem cum sit ut c d, ad d e, ita quadratum ex a b, ad quadratum ex a f, erit per conversionem rationis ut c d, ad c e, ita quadratum ex a b, ad quadratum ex f b, (Superatur enim quadratum a f, à quadrato a b, quadrato f b, eodem excessu, nimirum quo numerus d e, à numero d c, superatur, id est, numero c e,) rectae igitur a b, f b, sunt longitudine commensurabiles. Igitur inuenientur duas Rationales, et c. Quod erat faciendum.

Probl. 7. Propos. 31.

INVENTIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

E X P O N A T V R Rationalis linea a b, inuenianturque ex lemma 2. Clavi propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati c e, e d, ita ut compositus ex illis c d, non sit quadratus, vel



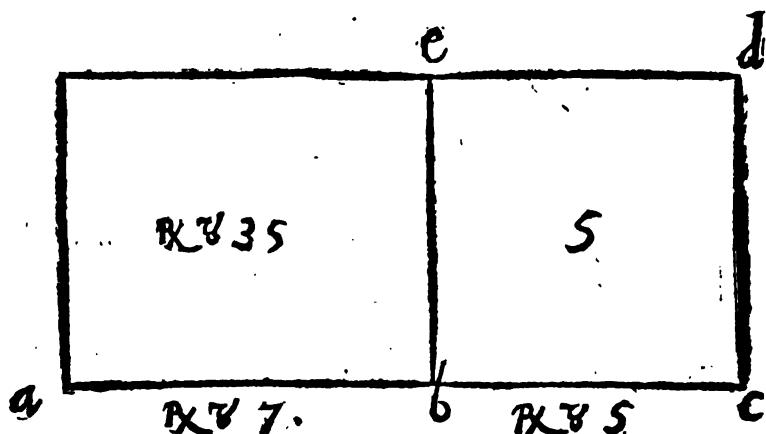
c, 144. e, 16. d
c..... e... d.

numerus aliquis quadratus secetur in duos numeros non quadratos $c \cdot e, e \cdot d$, utrumvis enim horum fiat, totus $c \cdot d$, ad neurrum ipsorum proportionem habebit, quam numeri quadrati habent inter se, alias esset totus $c \cdot d$, etiam quadratus secundum priorem modum datum hoc lemmate Clauij. At secundum posteriorem, quilibet ipsorum esset etiam quadratus, vt vult 24. propos. lib. 8. Deinde vt in coroll. propos. 6. lib. huins Clavius docuit fiat vt $c \cdot e, ad e \cdot d$; ita quadratum ex $a \cdot b$, ad quadratum ex $a \cdot f$. Accommodeturque $a \cdot f$, in semicirculo $a \cdot f \cdot b$, circa diametrum $a \cdot b$, descripto. Denique connectatur recta $f \cdot b$, poterit igitur vt in antecedenti demonstratione fuit ostensum quadratum $a \cdot b$, plus, quam quadratum $a \cdot f$, quadrato recte $f \cdot b$, eruntque $a \cdot b, a \cdot f$. Rationales, & solum commensurabiles potentia, sunt enim media demonstrationum eadem. Rursus cum per conuersionem rationis sit, vt $c \cdot d, ad e \cdot d$, ita quadratum ex $a \cdot b$, ad id quod ex $f \cdot b$. Non habent autem numeri $c \cdot d, e \cdot d$, rationem quadratorum, non habebunt quoque quadrata ex $a \cdot b, f \cdot b$, descripta, rationem, quam numerus quadratus habet ad numerum quadratum. Igitur per 9. propos. lib. huins $a \cdot b, f \cdot b$, incomensurabiles sunt longitudine.

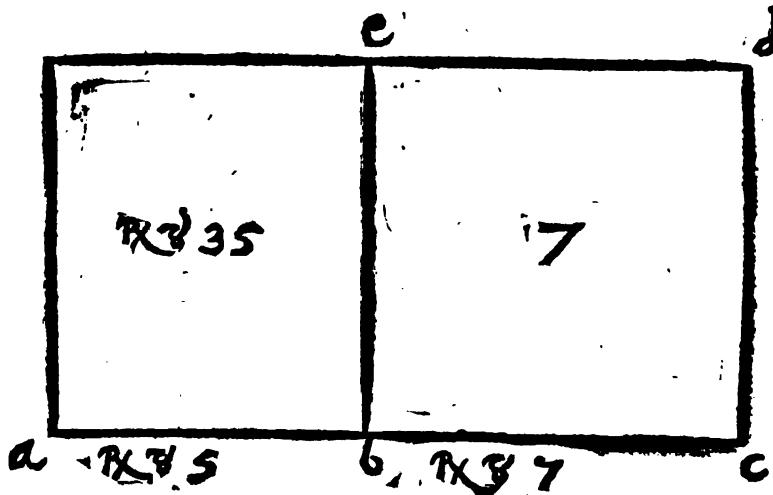
Inuenimus igitur duas Rationales, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA EX CLAVIO.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum ad quadratum minoris.



SINT duæ rectæ inæquales $a \cdot b, b \cdot c$, in rectum constituta, quarum $a \cdot b$, maior sit. Dico esse vt $a \cdot b, ad b \cdot c$, ita rectangulum sub $a \cdot b, b \cdot c$, ad quadratum ex $b \cdot c$. Describatur enim ex $b \cdot c$, quadratum $b \cdot d$, compleaturque rectangulum $a \cdot d$, eritque rectangulum $a \cdot e$, sub $a \cdot b, b \cdot c$, contentum; quod $b \cdot e$, ipsi $b \cdot c$, sit aequalis; perspicuum autem est, esse vt $a \cdot b, ad b \cdot c$, ita $a \cdot e$, ad $b \cdot d$.

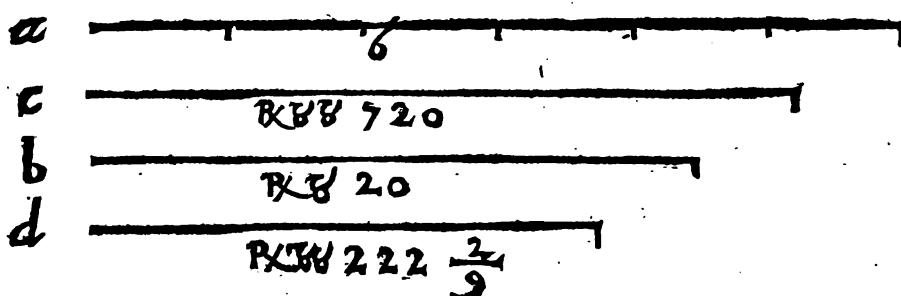


Eodem modo erit, ut minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, ut in secunda figura est manifestum, in qua a b, minor est quam b c.

Probl. 8. Propos. 32.

I N V E N T R E duas Medias potentia tantum commensurabiles, quae Rationale continent, ita ut maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.

S V M A N T V R due Rationales a b, quae tantum sint potentia commensurabiles, ita ut maior illarum plus possit, quam minor quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, si que c, media proportionalis inter a, et b, deinde fiat ut a, ad b, ita c, media ad d, Igitur cum a, et b, sint Rationales, solumque potentia commensurabiles: erit rectangulum sub ipsis contentum, Medium; ut vult 22. propos. lib. huius, rectaque, que illud poterit Media.



Q V O N I A M verò est ut a, ad b, ita c, ad d, sunt autem a, et b, commensurabiles potentia, erunt et c, d, etiam tantum potentia commensurabiles, ut docuit Clavius scholio propos. 10. lib. huius: Quare cum d, Media c, sit commensurabilis, erit et d, Media, ut patet ex 24. propos. huius lib. Inuenientur sunt igitur due Mediae c, et d, solum potentia commensurabiles. Dico et eas Rationale comprehendere. Nam cum sit ut a, ad b, ita c, ad d, permutandoque, ut a, ad c, ita b, ad d, Sit autem ut a, ad c, ita c, ad b, erit quoque, ut c, ad b, ita b, ad d, Atque adeò rectangulum sub c, et d, contentum, aequaliter erit quadrato ex b, descripto, ex 17. propos. lib. 6. Sed quadratum ex b Rationale est. Igitur et rectangulum sub c, et d, illi aequaliter, Rationale est. Igitur Mediae c, d, Rationale continent. **Quoniam** verò est ut a, ad b, ita c, ad d, potest autem a, plus, quam b, quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, Igitur et c, plus, quam d, poterit quadrato etiam rectae sibi longitudine commensurabilis, ut constat ex 13. propos. lib. huius. Inuenimus ergo duas Medias, et c. **Quod erat faciendum.**

Si verò repertae sint due Rationales a, et b, potentia solum commensurabiles, quarum maior plus possit, quam minor, quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, et reliqua perficiantur ut prius, ostendemus eodem modo inuentas esse duas Medias potentia solum commensurabiles, quae Rationale continent, quarum maior plus poterit, quam minor, quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis.

S C H O L I V M E X C L A V I O.

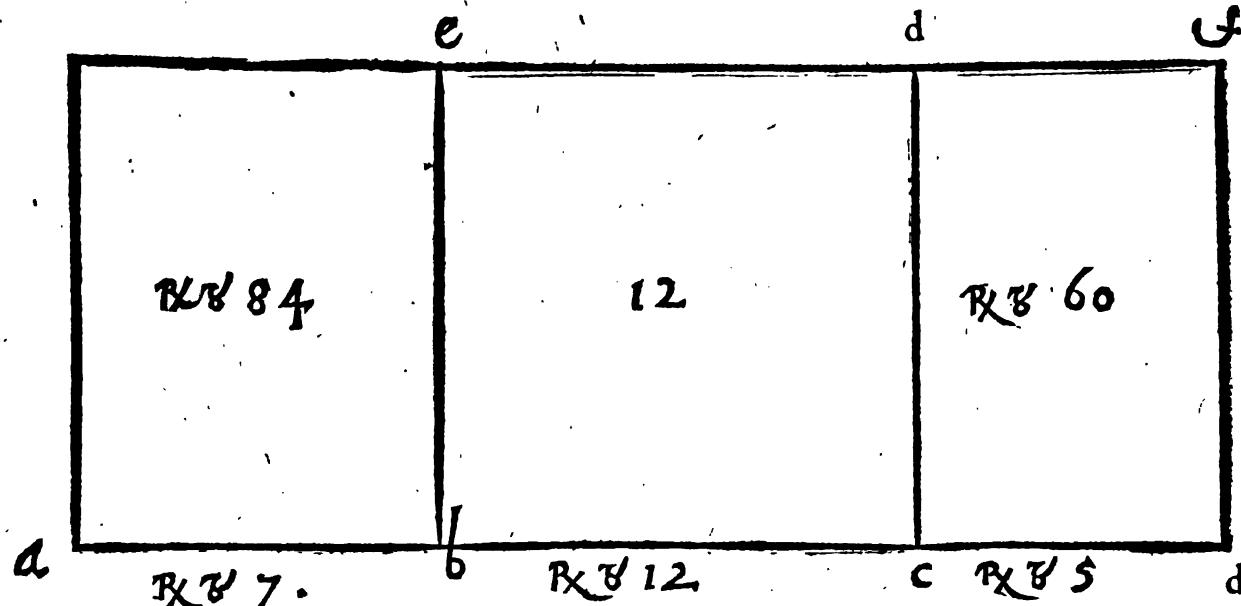
A L I I hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem brevius, ac facilius idem sine ipso ostendemus, ut facile indicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. In verò rectas c, d, Medias esse potentia solum commensurabiles, quae Rationale continent, non aliter hic ostendimus, ac in propositione 28. huius libri,

LEMMA

LEMMA EX CLAVIO.

Si sint tres linea \bar{e} rect \bar{e} , erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima, & secunda contentum, ad id, quod sub secunda, & tertia continetur.

SINT tres recta a b, b c, c d, in rectum constituta. Dico esse vt a b, ad c d, ita rectangulum sub a b, b c, ad rectangulum sub b c, c d. Describatur enim ex b c, quadratum b c d e, perficiaturque rectangu-

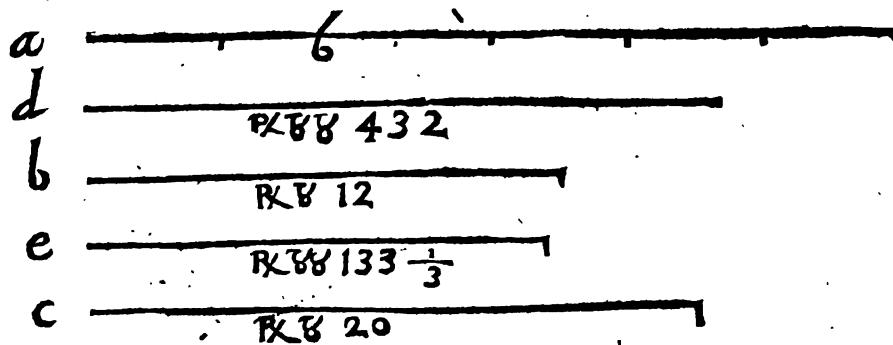


lum a f. Eritque a e, contentum sub a b, b c; & c f, sub b c, c d; quod b e, c d, ipsi b c, aquales sint. Per. 1. sexti. spicium autem est esse a b, ad c d, ut a e, ad c f. Quod est propositum.

Probl. 9. Propos. 33.

INVENIRE duas Medias potentia solùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectæ linea \bar{e} sibi longitudine commensurabilis.

REPERIANTVR tres Rationales a, b, c, solùm potentia commensurabiles, ita vt a, plus possit, quam c, quadrato linea \bar{e} sibi longitudine commensurabilis, ipsarumque a, & b, sumatur media proportionalis d. Deinde fiat vt d, ad b, ita c, ad e, Igitur cum ex lemmate Clavi



propos. antecedentis sit, vt a, ad c, ita rectangulum sub a, b, ad rectangulum sub b, c, sit autem rectangulum ex a, b, aquale quadrato ex d, per 17. propos. lib. 6. Et rectangulo sub b, c, aquale est rectangulum sub d, e, ex 16. propos. 6. quod quatuor illæ, nimirum d, b, c, e, sint proportionales,

P

EV CLIDI S

erit ut a , ad c , ita quadratum ex d , ad rectangulum sub d , e , ut autem quadratum ex d , ad rectangulum sub d , e , ita ex lemmate 3. Clavius propos. 19. lib. huius recta d , est ad rectam e . Quare erit ut a , ad c , ita d , ad e , sunt autem a , c , potentia solum commensurabiles. Igitur ex d , e , solum commensurabiles erunt potentia, ut demonstrauit Clavius scholio propos. 10. lib. huius. Cum autem d , potens spatium contentum sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus, sit Irrationalis, ex 22. propos. lib. huius ex eis Media, erit ex e , illi commensurabilis, Media, ex 24. propos. huius lib. Igitur inuenta sunt duæ Mediae d , ex e , solum potentia inter se commensurabiles. Dico ex eas Medium continere. Nam cum rectangulum sub b , c , sit Medium, (continetur enim sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus) illique sit aquale rectangulum contentum sub d , e , erit Rectangulum sub d , e , Medium. Denique quia iam fuit ostensum esse ut a , ad c , ita d , ad e , possit autem a , plus, quam c , quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, poterit ex d , plus, quam e , quadrato etiam recta sibi longitudine commensurabilis. Inuenta sunt igitur duæ Mediae, quæ, ex e . Quod erat faciendum.

Si vero fuissent reperta a , b , c , potentia solum commensurabiles, ita ut maior a , plus posset, quam c , quadrato recta sibi incommensurabilis longitudine, reliqua autem perficerentur ut prius, facile erit demonstrare inuentas esse duas Medias, Medium comprehidentes, quarum maior d , plus potest, quam minor e , quadrato recta sibi incommensurabilis longitudine. Quod est propositum.

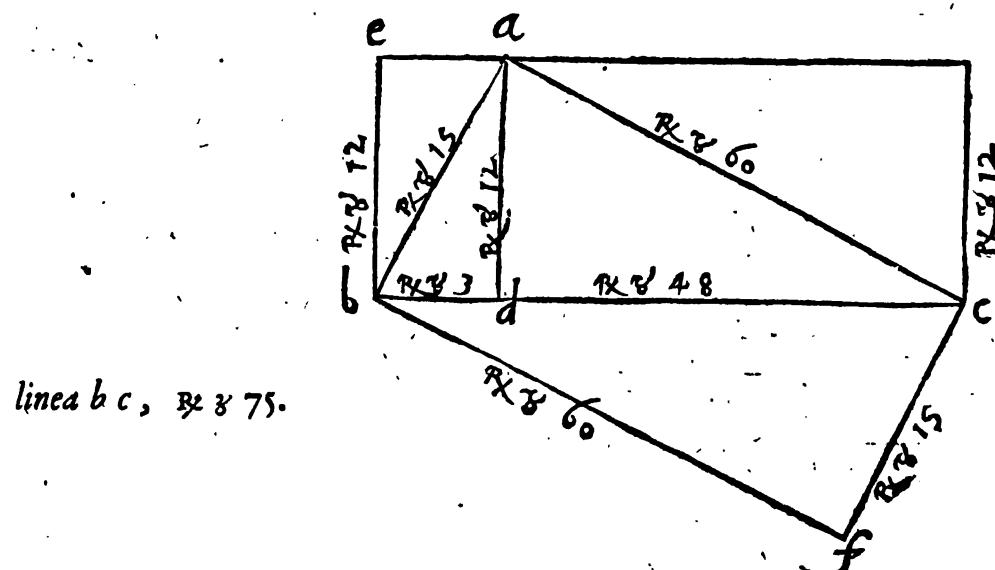
LEMMA I. EX CLAVIO.

Si in triangulum rectangulum a , b , c , angulum rectum habens b a c , à quo perpendicularis demittatur a d . Dico rectangulum contentum sub c b , b d , æquale esse quadrato ex a : contentum autem sub b c , c d , æquale quadrato ex a c , & contentum sub b d , d c , æquale quadrato ex a d ; Contentum denique sub b c , a d , æquale contento sub a b , a c .

17. sexti.

QVONIAM ex corollario propos. 8. lib. 6. recta a b , media proportionalis est inter c b , b d ; erit rectangulum sub c b , b d , quadrato ex a b , æquale.

Eadem ratione erit rectangulum sub b c , c d , æquale quadrato ex a c , quoniam per idem corollarium a c , media proportionalis est inter b c , c d .



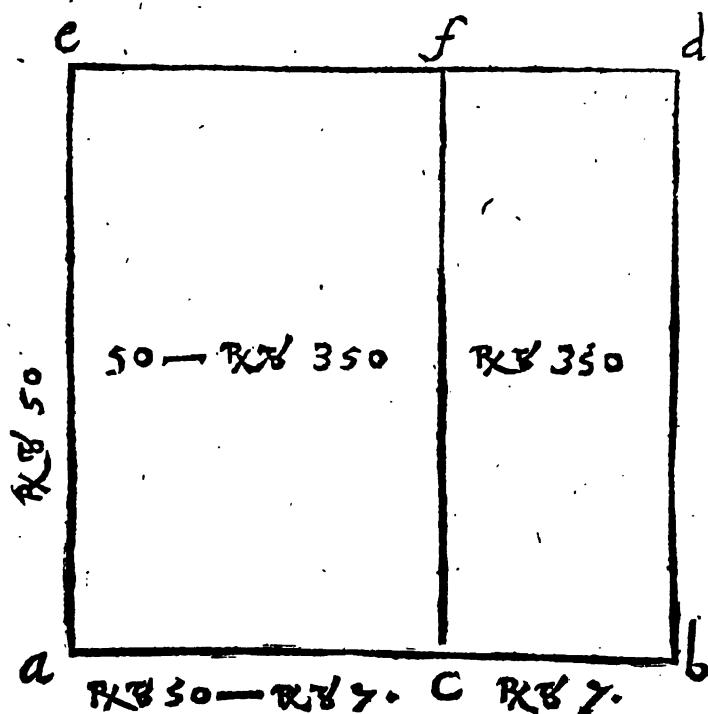
RVR.SVS quia ex eodem coroll. a d, inter b d , d c , media est proportionalis, erit eodem modo rectangulum sub b d , d c , æquale quadrato ex a d .

Postremo : quia triangula $a b c, a b d$, similia sunt, erit ut $b c$, ad $a c$, ita $a b$, ad $a d$; Quare re-^{8. sexti.}
 etangulum sub $b c, a d$, quale est rectangulo sub $a b, a c$. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur re-^{16. sexti.}
 etangulum $c e$, contentum sub $b c, a d$: Item rectangulum $a f$, sub $a b, a c$, contentum. Quoniam igitur ^{4. primi.}
 rectangulum $c e$, duplum est trianguli $a b c$, nec non & rectangulum $a f$, eiusdem trianguli est duplum,
 erunt inter se equalia rectangula $c e, a f$. Quod est propositum.

LEMMA II.

Si recta linea secetur in duas partes inæquales, erit ut maior pars ad minorem, ita rectan-
 gulum sub tota, & maiore parte, ad rectangulum sub tota, & minore parte contentum.

SECRETVR recta $a b$, non bifariam in c , si que major pars $a c$, Dico esse ut $a c$, ad $c b$, ita rectan-
 gulum sub $a b, a c$, ad rectangulum sub $a b, c b$. Describatur enim ipsius $a b$, quadratum $a b d e$, duca-
 turque $c f$, ipsi $a e$ parallela, eritque $a f$, contentum sub $a b, a c$, & $c d$, contentum sub $a b, c b$, quod $a e$,
 $c f$, ipsi $a b$, aequales sint. Quoniam igitur est ut $a c$, ad $c b$, ita $a f$, ad $c d$; Constat propositum. ^{4. sexti.}



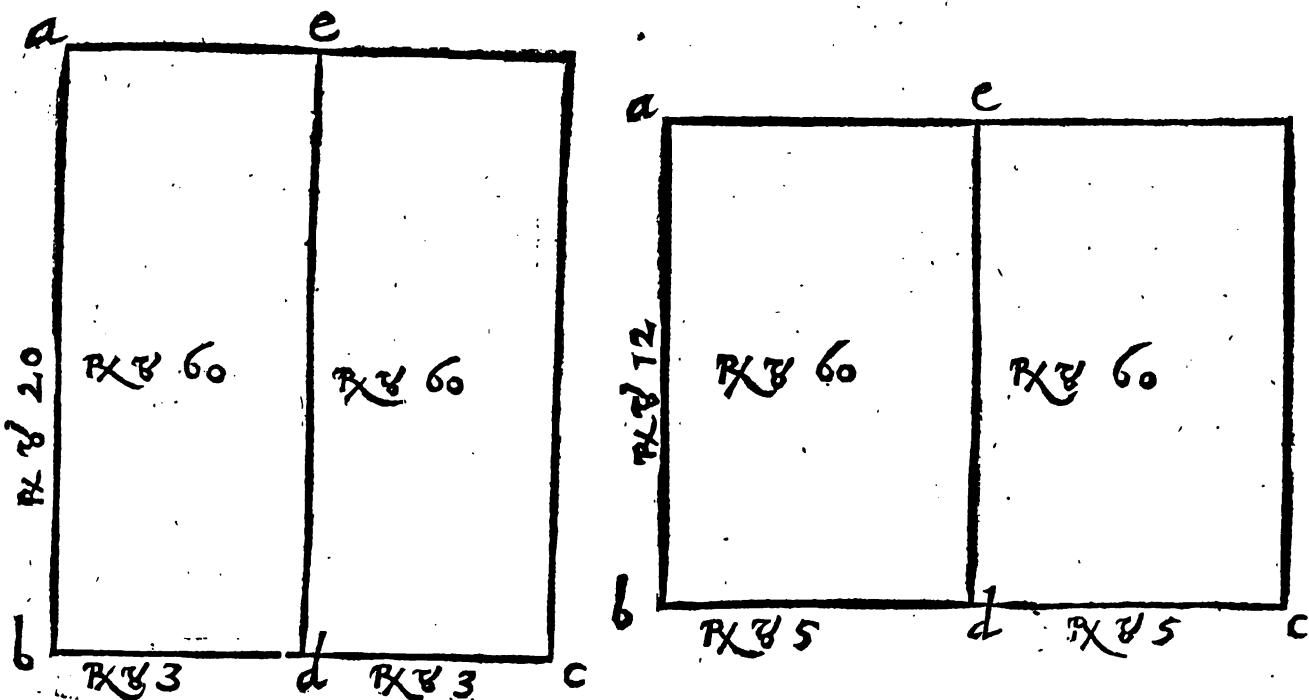
$a b, PK 50.$
 $c b, PK 70.$
Quadratum a d, 50.

Eadem ratione erit, ut minor pars $b c$, ad maiorem $c a$, ita $b f$, contentum sub $a b, b c$, tota, &
 minore parte, ad $c e$, contentum sub $a b, c a$, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

Si sint duas rectas lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulum sub
 ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub maiori linea, & dimidia parte minoris conti-
 netur.

SINT due recta inaequales a b, b c, angulum rectum constituentes a b c, seceturque minor b c, bifariam in d. Dico rectangulum sub a b, b c, duplum esse rectanguli sub a b, b d. Compleatur enim rectan-



^{1. sexti.} galum a c, sub a b, b c, ducaturque d e, ipsi a b, parallela, eritque b e, contentum sub a b, & b d, dimidia minoris. Quoniam igitur a c, ipsius b e, duplum est, quod & basis b c, dupla sit basis b d, constat propositum.

Eodem modo, si b c, secta bifariam, sit maior, erit quod sub a b, b c, continetur, duplum eius, quod continetur sub a b, minore & b d, dimidia maioris, ut ex secunda figura apparet.

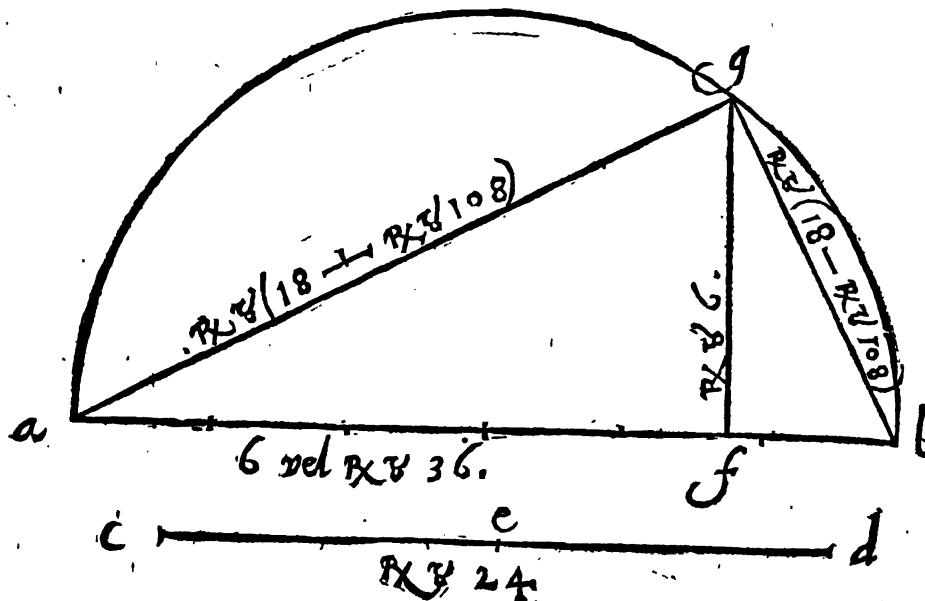
Probl. 10. Propos. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum Medium.

INVENIANTVR due Rationales a b, c d, quarum maior a b, plus possit, quam minor c d, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, sitque minor c d, bifariam secta in puncto e. Deinde per lemma 2. Clavi propos. 17. huius lib. Applicetur ad a b, rectangulum æquale quadrato dimidiij minoris linea, deficiensque figura quadrata, sitque quod sub a f, f b, continetur. Postremò descripto semicirculo circa diametrum a b, erigatur f g, ad diametrum a b, perpendicularis, sintque a g, g b, connectæ in puncto g. Quoniam recta a b, plus potest, quam c d, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, sitque ad a b, applicatum rectangulum æquale quadrato dimidiij minoris c d, deficiens figura quadrata, erunt partes a f, f b, inter se longitudine incommensurabiles, per 19. propos. lib. huius. Est autem, vt a f, ad f b, ita per lemma 2. Clavi propos. antecedentis, rectangulum sub a b, a f, ad rectangulum sub a b, f b. Sed rectangulum sub a b, a f, quadrato ex a g, est æquale, & rectangulum sub a b, f b, quadrato ex g b, etiam est æquale ex lemmate 1. Clavi propos. antecedentis. Quare erit vt a f, ad f b, ita quadratum ex a g, ad quadratum ex g b. Ac proinde cum a f, f b, sint longitudine incommensurabiles ostensa, erunt & quadrata ex a g, g b, incommensurabilia, vt vult 10. propos. huius lib. Re-

ELEMENTVM DECIMVM.

Etæ quoque $a g, g b$, potētia inter se incomensurabiles, ex 4. definitione lib. huius. Quonia quadratum ex $a b$, Rationali, Rationale est, sitque quadratum illud æquale quadratis $a g, g b$, per 47. lib. 1. Erit & compositum ex rectarum quadratis $a g, g b$, Rationale. Deinde



Tota superficies contenta sub linea
composita ex $a g, g b$, faciet.
 $36 + \sqrt{3} 364.$

$c e \sqrt{3} 6.$
 $af, 3 + \sqrt{3} 3.$
 $fb 3 - \sqrt{3} 3.$

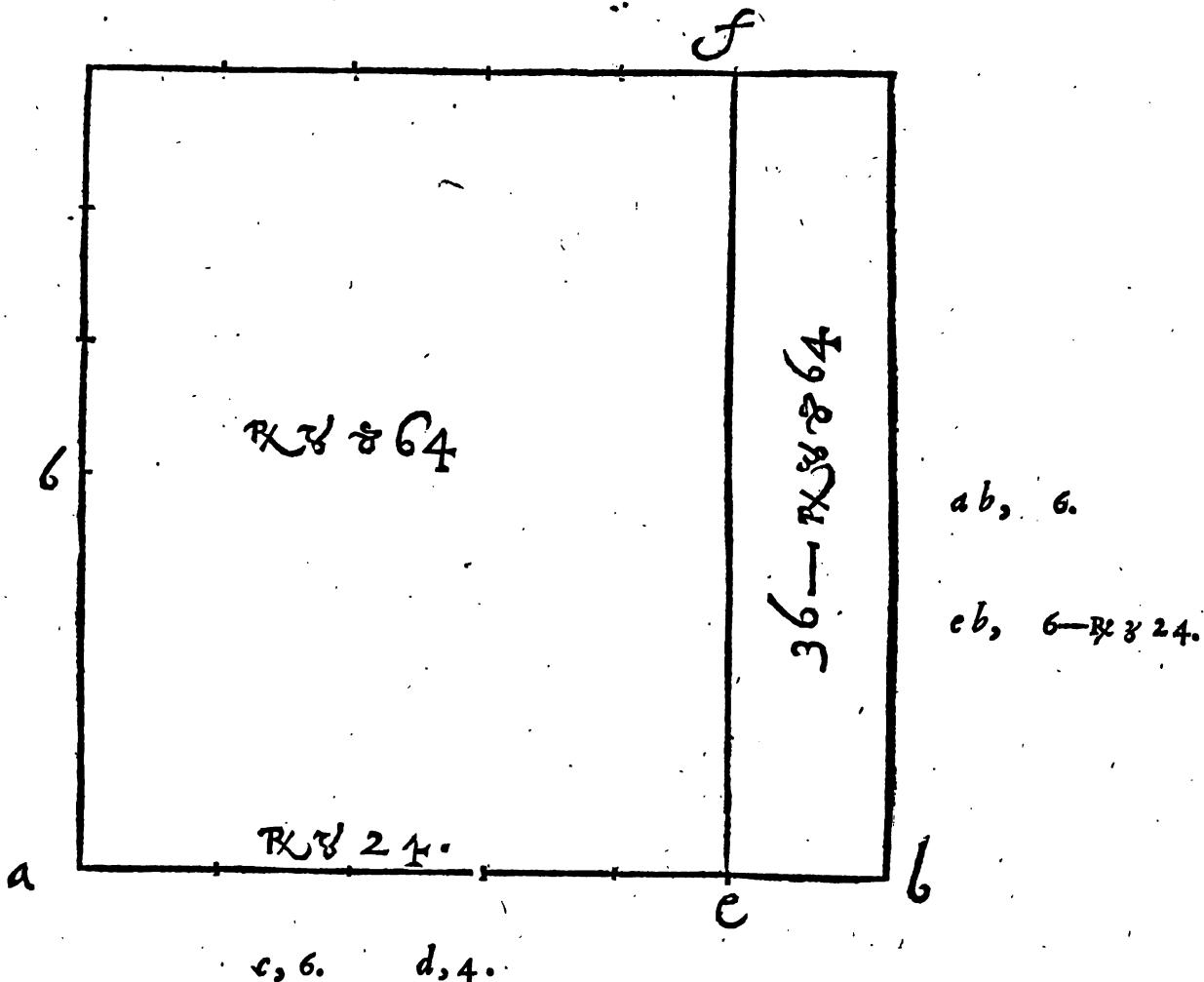
rectangulum sub $a f, f b$, (quod quadrato ex $c e$, æquale est) æquale fit quadrato ex f enim $f g$, media proportionalis inter $a f, f b$ erunt quadrata ex $f g$, & $c e$, inter se &
Quare $c d$, dupla existens ipsius $c e$, dupla quoque erit ipsius $f g$, ac propterea ex lemi Clauij propos. antecedentis rectangulum sub $a b, c d$, duplum erit rectanguli sub $a b, f g$, sit dimidia minoris linea $c d$) rectangulum autem sub $a b, c d$, Rationalibus potentia commensurabilibus, Medium est, per 22. propos. huius lib. Igitur & rectangulum sub $a b$ li commensurable, cum sit eius dimidium, Medium erit: Atque rectangulo sub $a b, f g$, est rectangulum sub $a g, g b$, ex 1. lemmate Clauij propos. antecedentis: Quare contenta $a g, g b$, Medium & Irrationale est. Iam vero compositum ex rectarum quadratis $a g, g b$ Irrationale est ostensum. Inuentæ sunt igitur duæ rectæ, &c. Quod erat faciendum.

S C H O L I V M C L A V I I .

D E M O N S T R A T V R hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, ut duo spatia Irrationalia componantur, Rationale, hac ferè ratione.

Exponatur Rationalis linea $a b$, & duo numeri $c d$, quorum c , maior sit, non habentes proportionem quam quadratus quadratum si. itaque ut c , ad d , ita quadratum ex $a b$, ad quadratum ex $a e$, & tandem descripto quadrato ex $a b$, educatur $a b$, perpendicularis. Quoniam igitur est ut c , ad d , ita quadratum ex $a b$, ad quadratum ex $a e$. Non habet autem c , portionem quam quadratus ad quadratum; erunt latera $a b, a e$, dictorum quadratorum proportionem non habenti quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilita. Ac propterea cum $a b$, tota longitudine sit incommensurabilis, erit eadem $a b$, & reliqua $e b$, longitudine incommensurabilis ex coroll. 17. huius lib. Ut autem $a b$, ad $a e$, ita quadratum ex $a b$, ad $a f$. Igitur cum $a b, a e$, incommensurabiles sint longitudine, erunt quadratum ex $a b$, & rectanguli commensurabilita. Quare quadrato ex $a b$, existente Rationali, quod est $a b$, Rationalis ponatur, erit $a f$, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemque argumento ostendemus $b f$, Irrationale esse. Quia vero $a f, b f$, componunt quadratum ex $a b$; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.

Q

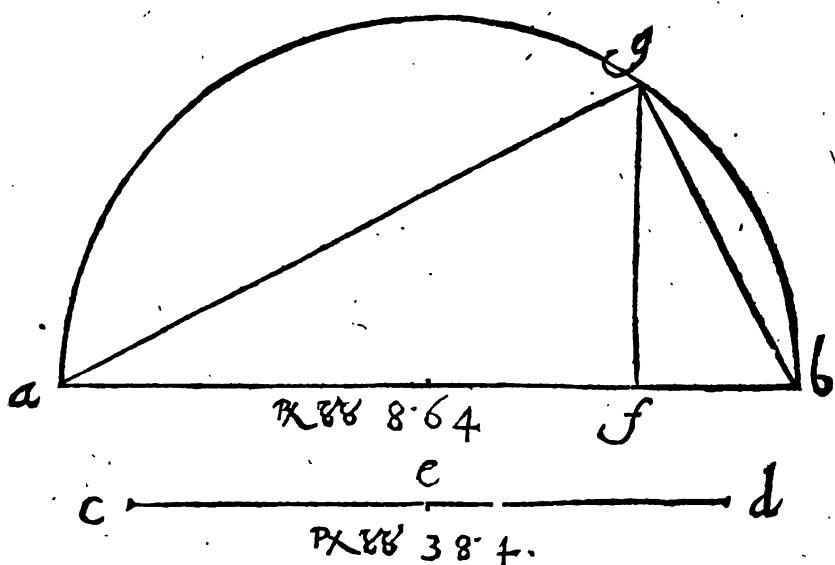


At vero si $a, f, f b$, Rationalia sunt, ostendemus et totum $a f b$, ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim utrumque $a f$, 16. decimi. $f b$, Rationale sint: erunt ipsa inter se commensurabilia. Igitur et totum $a f b$, ex ipsis compositum utriusque eorum commensurable erit. Quare $a f b$, totum commensurable utriusque Rationali $a f f b$, Rationale quoque est. Quod est propositum.

Probl. II. Propos. 35.

I N V E N I R E duas rectas lineas potentia incommensurables, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale.

R E P E R I A N T V R due Media $a b, c d$, solum potentia inter se commensurables Rationale continent, quarum $a b$, maior plus possit, quam minor $c d$, quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, fiantque reliqua, ut in antecedenti propositione. Igitur demonstrabimus, ut in praecedenti rectas $a g, e g b$, esse potentia incommensurables. Quoniam vero quadratum ex Media $a b$, aequaliter est quadratis rectangularium $a g, g b$, ex 47 propos. lib. i. erit ideo compositum ex ipsarum quadratis $a g, g b$, Medium. Rursus ostendemus ut in antecedenti propositione rectangulum sub $a b, c d$, duplum esse rectanguli sub $a b, f g$, ac proinde rectangula illa esse inter se commensurabilia. Igitur cum rectangulum sub $a b, c d$, ex hypothesi Rationale existat, erit et rectangulum sub $a b, f g$, huic commensurabile, Rationale. Iam vero compositum ex rectangularium quadratis $a g, g b$, Medium ostensum est. Quare rectae $a g, g b$, simul composite faciunt



$$ag, \text{P} \text{XX} 8 (\text{P} \text{XX} 216 + \text{P} \text{XX} 872.)$$

$$gb, \text{P} \text{XX} 8 (\text{P} \text{XX} 216 - \text{P} \text{XX} 872)$$

Tota superficies sub ag, gb, contenta erit.
 $\text{P} \text{XX} 864 + 24.$

$$ce, \text{P} \text{XX} 24.$$

$$gf, \text{P} \text{XX} 24.$$

$$af, \text{P} \text{XX} 54 + \text{P} \text{XX} 6.$$

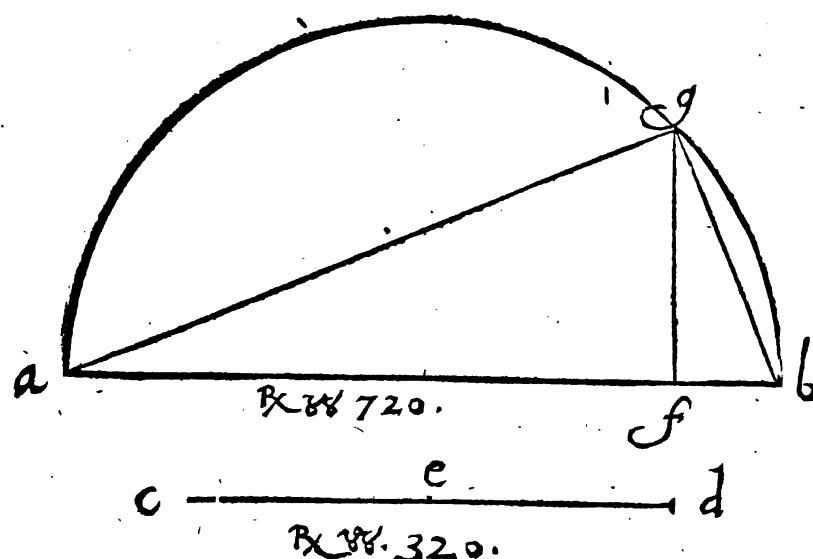
$$fb, \text{P} \text{XX} 54 - \text{P} \text{XX} 6:$$

compositum ex rectarum quadratis, Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale; Invenientur ergo due Media, &c. Quod erat faciendum.

Probl. 12. Propos. 36.

IN VENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis, Medium, & rectangulum sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

REPERIANTVR due Mediae a b, c d, quæ inter se sint tantum commensurabiles potentia, Mediumique contineant, ita ut maior a b, plus possit, quam minor c d, quadrato rectæ sibi incommensurabilis longitudine, & reliqua construantur, ut in propos. 34. Ostendemus igitur rectas a g, g b, esse potentia incommensurabiles. Quoniam verò quadratum ex a b, Media, Medium est, sitque æquale quadratus rectangularis a g, g b, per 47. lib. 1. erit & compositum ex ipsarum quadratis a g, g b, Medium. Iam verò demonstrabimus ut in 34. propos. lib. huius, rectangulum sub a b, & c d, duplum esse rectanguli sub a b, f g, ac proinde illi esse commensurabile: igitur & Medium, cum rectangulum sub a b, c d, ex hypothesi Medium sit, rectangulum autem sub a b, f g, & quale est rectangulo sub a g, g b, contento, igitur rectangulum sub a g, g b, Medium est. Quoniam verò recta a b, longitudine ponitur incommensurabilis ipsi c d, eidem autem c d, recta c e, longitudine sit commensurabilis, quod illa huius dupla sit, erunt rectæ a b, c e, incommensurabiles longitudine, ex 13. propos. lib. huius. Sed ut a b, ad c e, ita per lemma 3. Clavi propos. 19. lib. huius quadratum ex a b, est ad rectangulum sub a b, c e, hoc est, ad rectan-



$$ag, \text{Rx } \gamma (\text{Rx } \gamma 180 + \text{Rx } \gamma 60.)$$

$$gb, \text{Rx } \gamma (\text{Rx } \gamma 180 - \text{Rx } \gamma 60.)$$

Tota superficies contenta sub ag, gb, est.

$$\text{Rx } \gamma 720 + \text{Rx } \gamma 480.$$

$$ce, \text{Rx } \gamma 20.$$

$$gf, \text{Rx } \gamma 20.$$

$$af, \text{Rx } \gamma 45 + \text{Rx } \gamma 5.$$

$$fb, \text{Rx } \gamma 45 - \text{Rx } \gamma 5.$$

gulum sub ab, fg, vel sub ag, gb, Quare quadratum ex ab, incommensurabile est rectangulo sub ag, gb, Inuenimus igitur duas rectas, &c. Quod erat facendum.

SCHOLIVM CLAVII.

EX hoc vero Problemate facile illud absoluemus quod ad prop: 24. huius lib. nos demonstratores receperimus nimis un.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum a g, e b, quam rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composto incommensurabile; erunt quoque linea potentes illud compositum, Medium, & hoc rectangulum Medium, Media, incommensurabiles tam longitudine quam potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est compositum ex quadratis rectarum a g, g b, & rectangulum sub a g, g b, commensurabilia. Quod non ponitur. Quocirca si sumatur ab, potens compositum ex quadratis rectarum a g, g b, & alia recta potens rectangulum sub a g, g b, id est, media proportionalis inter a g, g b, invenientur erunt due Media & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

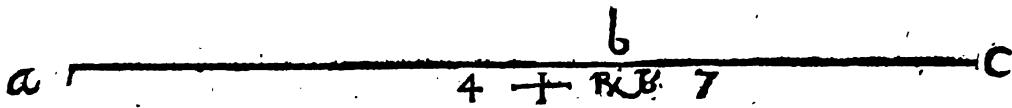
PRINCIPIVM SENARIORVM PER COMPOSITIONEM.

Theor. 25. Propos. 37.

Si duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales a b, b c, potentia inter se tantum commensurabiles, Inuenianturque per 2. lemma traditum à Claudio propos. 21. Dico totam a c, esse Irra-

tionalem. Quoniam enim $a b$, longitudine incommensurabilis est ipsi $b c$, sique, ut $a b$, ad $b c$, ita rectangulum sub $a b, b c$, ad quadratum ex $b c$, ex lemmate Clavi propos. 31. lib. huius, erit re-



Rectangulum sub $a b, b c$, quadrato ex $b c$, incommensurabile, per 10. propositionem lib. huius. Sed rectangulo sub $a b, b c$, commensurabile est eius duplum; nimis quod bis sub $a b, b c$, continetur, et quadrato ex $b c$, commensurabile est quadratum recta $a b$, (sunt enim ambo quadrata Rationalia) atque adeo et compositum ex rectarum quadratis $a b, b c$, eidem quadrato ex $b c$, commensurabile est, ut constat ex 16. propos. lib. huius. Quare ex iis, quae a Claudio tradita sunt scholio propos. 14. lib. huius, quod bis sub $a b, b c$, continetur incommensurabile est composito ex rectarum quadratis $a b, b c$, Quocirca compositum ex eo, quod bis sub $a b, b c$, et compositum ex rectarum quadratis $a b, b c$, hoc est totum quadratum ex $a c$, contentum (nam quadratum hoc etuale est quadratis rectarum $a b, b c$, una cum rectangulo bis sub $a b, b c$, comprehenso, ut constat ex 4. propos. lib. 2.) incommensurabile est composito ex rectarum quadratis $a b, b c$, ut patet ex 17. propos. lib. huius. Sed compositum ex rectarum quadratis $a b, b c$, Rationale est, cum sit commensurabile ostensum quadrato linea Rationali $b c$, Igitur quadratum ex $a c$, quadrato Rationali $b c$, incommensurabile, Irrationale est, atque adeo recta $a c$, Irrationalis, ex 10. definitione lib. huius. Vocetur autem ex binis nominibus, seu ut alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus scilicet $a b, b c$, componitur. Si due igitur, et c. Quod erat ostendendum.

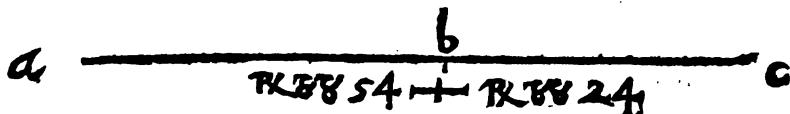
SCHOLIVM CLAVII.

ITAE QVE ex duabus Rationalibus potentia solam commensurabilibus procreantur due linea Irrationales. Nam recta, que inter eas est medio loco proportionalis, Irrationale est, que Media vocatur. At vero composita ex ipsis, Irrationale est, ^{22. decimi.} que ex binis nominibus dicitur. ^{37. decimi.}

Theor. 26. Propos. 38.

Si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

COMPONANTVR due Mediæ inuenta propos. 28. lib. huius, sive illæ $a b, b c$, que tantum potentia commensurantur, et que Rationale contineant. Dico totam $a c$, esse Irrationalem. Nam cum recta $a b$, sit ad rectam $b c$, ut rectangulum sub $a b, b c$, ad quadratum minoris $b c$, ut vult lemma Clavi propos. 31. lib. huius. Sunt autem $a b, b c$, incommensura-



biles longitudine ex positione, erunt rectangulum sub $a b, b c$, et quadratum minoris $b c$, incommensurabilia, ut constat ex 10. propos. lib. huius: Rectangulo autem sub $a b, b c$, contento,

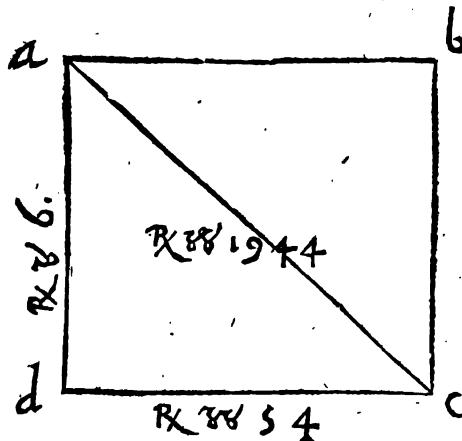
R

commensurabile est, quod bis sub a b, b c, & quadrato minoris b c, commensurabile est compositum ex rectarum quadratis a b, b c, (Nam cum a b, b c, sint commensurabiles potentia, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, atque adeo, ut ex 16. propositione colligitur, compositum ex rectarum quadratis a b, b c, quadrato minoris b c, commensurabile) Igitur rectangulum bis sub a b, b c, comprehensum, & compositum illud ex rectarum quadratis, incommensurabilia sunt, ut constat ex iis, quae à Claudio sunt tradita scholio propos. 14. lib. huius. Compositum igitur ex rectarum quadratis a b, b c, vna cum rectangulo bis sub a b, b c, id est totum quadratum ex a c, quod huic composito aequalis est per 4. proposit. lib. 2. rectangulo bis sub a b, b c, contento, incommensurabile est, ut vult 17. propos. lib. huius. Sed eidem rectangulo bis sub a b, b c, contento, commensurabile est, quod semel tantum sub a b, b c, continetur, ut saepissime à nobis est repetitum. Quare quadratum ex a c, rectangulo sub a b, b c, est incommensurabile. Sed rectangulum sub a b, b c, Rationale ponitur. Igitur quadratum ex a c, huic Rationali incommensurabile, Irrationale est, per 10. defin. lib. huius, ac proinde & recta a c, Irrationalis. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel ut alij loquuntur Bimediate prius. Si igitur due Mediae, &c. Quod erat ostendendum.

LEMMA EX CLAVIO.

Quod sub linea Rationali & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

21. decimi. CONTINEATVR rectangulum a b c d, sub Rationali a d, & Irrationali d c, Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, faciet ipsum ad Rationalem a d, applicatum latitudinem d c, Rationalem. Quod est absurdum, ponitur enim d c, Irrationalis. Non ergo a c, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.



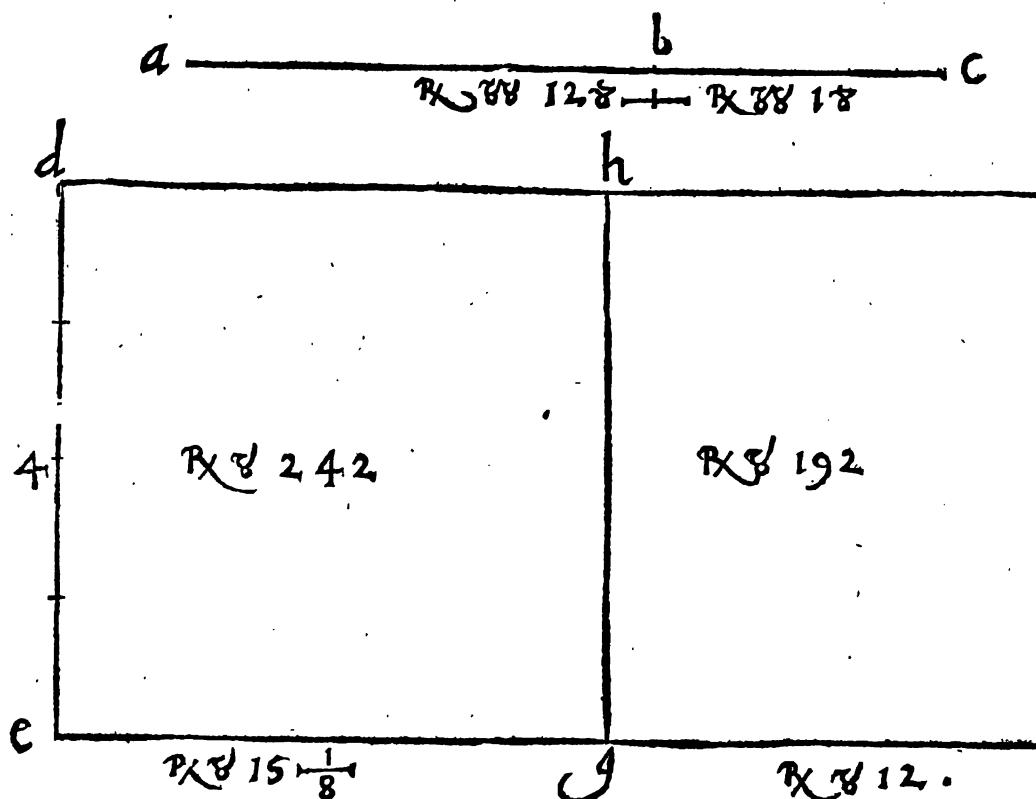
Theor. 27. Propos. 39.

Si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis secunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ a b, b c, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, sive inveniæ per ea, que ad propos. 29. lib. huius docuimus. Dico totam a c, esse Irrationalem. Exponatur Rationalis d e, ad quam applicetur rectangulum d f, aequalis quadrato ex a c, descriptio, &c: composito ex rectarum quadratis a b, b c, aliud rectangulum describatur ad eandem Rationalem d e, sive d g. Quoniam quadratum ex a c, hoc est rectangulum d f, illi aequalis duobus quadratis, ex a b, b c, descriptis vna cum duobus rectangulis ex a b, b c, contentis, est aequalis, per 4. propos. lib. 2. erit rectangulum h f, aequalis rectangulo bis sub a b, b c, contento. Cum vero ex hypothesi rectangulum sub a b, b c, sit Medium, erit &c

ELEMENTVM DECIMVM.

h f. illi commensurabile, Medium; Est enim rectangulum *h f*, duplum rectanguli sub comprehensi, ut constat ex corollario Clavius propos. 24. lib. huius. Rursus quia qu.



Mediis *a b b c*, potentia commensurabilibus sunt inter se commensurabilia, erit & co ex rectarum quadratis utique quadrato commensurabile, atque adeo & rectangulum composito aequale; Sed tam quadratum ex *a b*, quam quadratum ex *b c*, Medium est. compositum illud, Medium erit, ac proinde & rectangulum *d g*, ut colligitur ex corollario Clavius propos. 24. lib. huius. Quoniam igitur Media *d g h f*, ad Rationalem *d e*, sunt (nam *g h*, Rationali *d e*, est aequalis) erunt latitudines *e g g f*, Rationales, & Rationales *d e*, longitudine incommensurabiles, ut constat ex 23. propos. lib. huius. Deinde cur sint longitudine incommensurabiles, si que ut *a b*, ad *b c*, ita quadratum ex *a b*, ad rectangulum sub *a b b c*, ex lemmate 3. Clavius propositionis 19. lib. huius erit quadratum ex *a b*, sub *a b b c*, contento, incommensurabile, ut scholium Clavius propos. 10. lib. huius docet. drato ex *a b*, compositum ex rectarum quadratis *a b b c*, iam est ostensum commensurabile rectangulo sub *a b b c*, commensurabile est etiam, quod bis sub *a b b c*, continetur, me à nobis est demonstratum. Quare ex iis, quae traduntur à Claudio scholio propos. 14. erit compositum ex rectarum quadratis *a b b c*, id est rectangulum *d g*, rectangulo *b b c*, hoc est, rectangulo *h f*, incommensurabile. Igitur cum ex 1. proposit. lib. 6. sic ut rectangulum *d g*, ad rectangulum *h f*, sic recta *e g*, ad rectam *g f*, erunt rectae *e g g f*, inter se longi commensurabiles, sed Rationales sunt ostensæ *e g g f*, Rationales igitur sunt *e g g f*; potentia commensurabiles: Igitur tota *e f*, composita ex duabus Rationalibus poterit commensurabilibus, Irrationalis est, ut vult 37. propos. lib. huius. Quare rectangulus tentum sub Rationali *d e*, & Irrationali *e f*, Irrationale est, ex lemmate Clavius pro antecedentis, ac proinde & quadratum ex *a c*, huic rectangulo aequale, Irrationale

quoque a c, Irrationalis, per 10. defin. lib. huius. Vocetur autem ex binis Mediis secunda, vel ut aliis placet Bimediale secundum. Si duæ igitur, &c. Quod erat ostendendum.

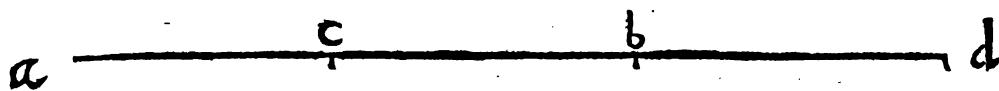
S C H O L I V M C L A V I I .

V O C A V I T Euclides in precedenti propositione lineam Irrationalem a c, que componitur ex duabus Mediis potentia tantum commensurabilibus, que Rationale continant, ex binis Mediis primam. Hic vero lineam Irrationalem a c, que componitur ex duabus Mediis potentia tantum commensurabilibus, que Medium continant, ex binis Mediis secundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius est Medio, quod Irrationale est, ex propos. 22. huius lib.

L E M M A C L A V I I .

Si recta linea non bifariam secerit, erit compositum ex quadratis partium maius, quam rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem superat.

S E C E T V R recta a d, in b, non bifariam sicutque maior pars a b, in qua sumatur b c, minoris b d, equalis, ut sit a c, excessus, quo a b, superat b d, hoc est b c, ipsi b d, aequalis.



$$a.d, \text{Rx } 3^4 0. \quad a.b, \text{Rx } 3^4 0 - \text{Rx } 3^4 5. \quad a.c, \text{Rx } 3^4 0 - \text{Rx } 3^4 2 0. \quad c.b, \text{Rx } 3^4 5. \quad b.d, \text{Rx } 3^4 5$$

Dico quadrata rectarum a b, b d, simul, maiora esse rectangulo bis sub a b, b d, quadrato recta a c. Quoniam enim quadrata ex a b, b c, aequalia sunt rectangulo bis sub a b, b c, una cum quadrato ex a c, estque b c, ipsi b d, aequalis: erunt quoque quadrata ex a b, b d, aequalia rectangulo bis sub a b, b d, una cum quadrato ex a c. Quare quadrata ex a b, b d, maiora sunt quam rectangulum bis sub a b, b d, quadrato recta a c. Quod est propositum.

C O R O L L A R I V M C L A V I I .

E x hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

Theor. 28. Propos. 40.

S i duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsis quadratis, Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

C O M P O N A N T V R duæ rectæ a b, b c, inuenta per ea, quæ docuimus propos. 34. potentia incommensurabiles, faciantque compositum ex ipsis quadratis Rationale, At rectangulum sub ipsis contentum, Medium. Dico totam a c, esse Irrationalem. Nam cum rectangulum sub a b, b c, ex hypothesi Medium sit, erit & bis sub a b, b c, contentum, Medium quoque, ut iam sapientissime à nobis demonstratum est: At vero compositum ex rectarum quadratis ex



hypothesi ponitur Rationale. Igitur rectangulum bis sub a b, b c, huic composito incommensurable erit: Rectangulum quoque bis sub a b, b c, unum cum composito ex rectarum quadratis a b, b c,

b, c , hoc est quadratum ex a, c , incommensurabile erit compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c per 17. propos. lib. huius. Igitur cum compositum illud Rationale sit, erit quadratum a, c , haec Rationali incommensurabile, Irrationale, ut vult 10. defin. lib. huius. Ac proinde ex recta a, c , Irrationalis. Vocetur autem Maior, nam cum possit duo quadrata ex a, b, b, c , descripta, una cum rectangulo bis sub a, b, b, c , comprehenso. Sitque compositum illud maius rectangulo b sub a, b, b, c , ut constat ex lemmate Clavi antecedentis propositionis, sitque compositum illud Rationale, ex rectangulum Medium, recte vocabitur a, c , Maior: Nam à Rationali, quod maius est nomen sumitur. Si igitur duas rectas, ex c . Quod erat demonstrandum.

Theor. 29. Propos. 41.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsis quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Ratiohale, ac Medium potens.

COMPONANTVR due Media inuenientur per ea, que ad propos. 35. tradidimus, sintque a, b, b, c , quæ inter se potentia non commensurantur, facientque compositum ex ipsis quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam a, c , ex illis

$$a \overline{bx} (bx 216 + bx 72) \rightarrow bx (bx 216 - bx 72)$$

duabus. Mediis compositam, esse Irrationalem. Nam cum compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c , Medium sit ex hypothesi, Quod verò bis sub ipsis continetur rectangulum, Rationale, erit compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c , rectangulo bis sub a, b, b, c , contento, incommensurabile, ex 17. propos. lib. huius. Compositum igitur ex rectarum quadratis a, b, b, c , una cum rectangulo bis sub a, b, b, c , hoc est, quadratum ex a, c , descriptum, incommensurabile est rectangulo bis sub a, b, b, c , ut constat ex eadem 17. propos. lib. huius. Cum igitur rectangulum bis sub a, b, b, c , contentum, Rationale existat, (est enim rectangulum illud duplum rectanguli sub a, b, b, c , contenti) erit quadratum a, c , haec Rationali incommensurabile, Irrationale ex 10. defin. lib. huius, recta quoque a, c , Irrationalis. Vocetur autem Rationale, ac Medium potens, potest enim compositum ex rectarum quadratis a, b, b, c , quod quidem Medium est, ex rectangulum bis sub a, b, b, c , contentum, quod Rationale existit. Igitur cum Rationale Irrationali nobiliter sit, à nobiliore parte primum nomen desumitur. Igitur si duas rectas, ex c . Quod erat demonstrandum.

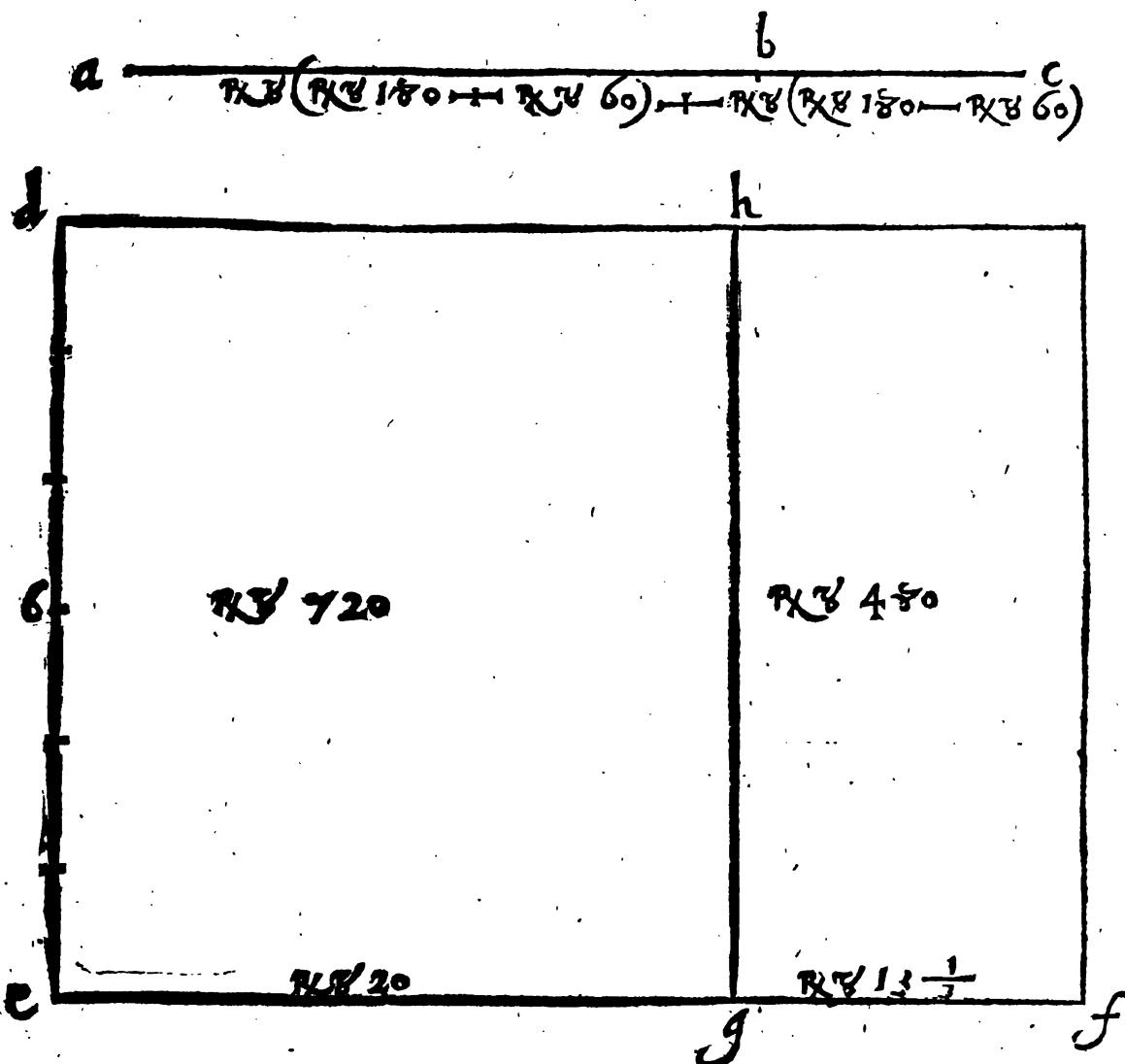
Theor. 30. Propos. 42.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsis quadratis, Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabilique composito ex quadratis ipsis: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONANTVR due rectæ superius inuenientur per ea, que docuimus propos.

S

36. sicutque a b, b c, inter se incommensurabiles potentia, facientes compositum ex ipsis quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Medium, & incommensurabile hunc compositione. Di-



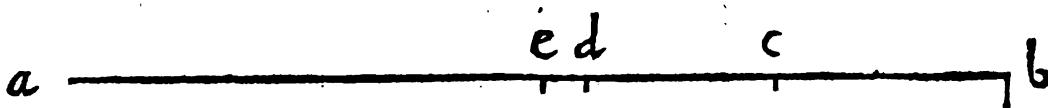
to totam a c, esse Irrationalem. Exponatur Rationalis d e, ad quam applicetur rectangulum d f, aequale quadrato ex a c, alterumque rectangulum ad eandem Rationalem d e, applicetur, aequale composite ex rectarum quadratis a b, b c, sitque d g, Quoniam igitur quadratum ex a c, hoc est, rectangulum d f, aequale est composite ex rectarum quadratis a b, b c, una cum rectangulo bis sub a b, b c, contento, ut constat ex 4. propos. lib. 2. erit rectangulum h f, rectangulo bis sub a b, b c, comprehenso aequale. Quoniam vero composite ex rectarum quadratis a b, b c, hoc est, rectangulum d g, & rectangulum bis sub a b, b c, Media sunt, sicutque applicata ad Rationalem d e, facient latitudines e g, g f, Rationales, ipsique d e, Rationali exposita longitude incommensurabiles, ut constat ex 23. propos. lib. huius. Rursus cum composite ex rectarum quadratis a b, b c, id est, rectangulum d g, sit incommensurabile rectangulo sub a b, b c, Eadem autem rectangulo commensurabile est, quod bis sub a b, b c, ut sapissime a nobis est repetitum, cum hoc sit illius duplum; sitque h f, erunt d g, h f, inter se incommensurabilia. Cum autem sit ut d g, ad h f, ita recta e g, ad rectam g f, erunt e g, g f, incommensurabiles longitudo. Iam autem Rationales sunt ostensa e g, g f. Rationales sunt igitur e g, g f, & solum potentia commensurabiles, ac proinde tota e f, ex duabus Rationalibus potentia tantum commensura-

bilibus composita, Irrationalis erit, ut vult 37. propositione lib. huius. Igitur rectangulum d f, sub Rationali d e, & Irrationali e f contentum, Irrationale est, ex lemmate Clavi propositionis 38. lib. huius: Atque adeo & quadratum ex a c, illi aequale, Irrationale est, recta quoque a c, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, potest enim compositum ex rectarum quadratis a b, b c, quod Medium est, & rectangulum etiam sub ipsis contentum, quod etiam Medium est ostensum. Si ergo due recta, & c. Quod erat ostendendum.

LEMMA EX CLAVIO.

Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales, erunt quadrata partium magis inæqualium simul, maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

SECETVR recta a b, inæqualiter in c, & rursus inæqualiter in d, sintque priores partes a c, c b, magis inæquales, quam posteriores a d, d b. Dico quadrata ex a c, c b, simul maiora esse quadratis ex a d,



$$\begin{array}{lllll} ab, \text{Br} \gamma 48. & cb, \text{Br} \gamma 3. & dc, \text{Br} \gamma 2. & ac, \text{Br} \gamma 12. & ac, \text{Br} \gamma 27. \\ ad, \text{Br} \gamma 27 - \text{Br} \gamma 2. & cd, \text{Br} \gamma 3 - \text{Br} \gamma 2. & cc, \text{Br} \gamma 3. & db, \text{Br} \gamma 3 + \text{Br} \gamma 2. & \end{array}$$

d b, simul. Divisa enim a b, bifariam in e, cadet punctum d, vel inter e c, vel inter a e. Cadat primum inter e c. Quoniam igitur rectangulum sub a c, c b, una cum quadrato ex e c, aequale est quadrato ex e s. secundi. e b: Item rectangulum sub a d, d b, una cum quadrato ex e d, aequale est eidem quadrato ex e b, erit rectangulum sub a c, c b, una cum quadrato ex e c, aequale rectangulo sub a d, d b, una cum quadrato ex e d. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium e c, e d, cum quadratum ex e c, maius sit quadrato ex e d, erit reliquum rectangulum sub a c, c b, minus reliquo rectangulo sub a d, d b; ac propterea & rectangulum bis sub a c, c b, minus erit rectangulo bis sub a d, d b. Quoniam vero quadratum ex a b, aequale est tam rectangulo bis sub a c, c b, una cum quadratis ex a c, c b, quam rectangulo bis sub a d, d b, una cum quadratis ex a d, d b, erit rectangulum bis sub a c, c b, una cum quadratis ex a c, c b, aequale rectangulo bis sub a d, d b, una cum quadratis ex a d, d b. Quare cum rectangulum bis sub a c, c b, ostensum sit minus rectangulo bis sub a d, d b, erunt reliqua quadrata ex a c, c b, maiora reliquis quadratis ex a d, d b. Quod est propositum.

Sed cadat iam d, inter a, e. Quoniam igitur partes a c, c b, magis inæquales ponuntur, quam partes a d, d b, erit a d, (qua minor est posteriorum) maior quam c b (qua priorum minor est) ac proinde cum a e, e b, aequales sint, erit reliqua e c, maior quam reliqua d e. Itaque quia rectangulum sub a c, c b, una cum quadrato ex e c, aequale est quadrato ex e b: Item rectangulum sub a d, d b, una cum quadrato s. secundi.



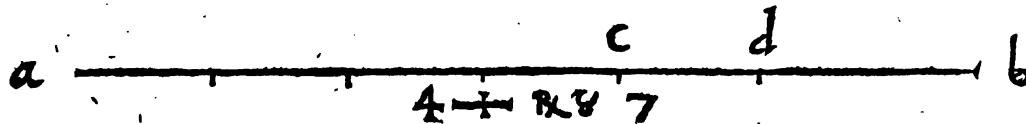
$$ad, \text{Br} \gamma 3 + \text{Br} \gamma 2.$$

ex d e, aequale est quadrato ex a e, hoc est, eidem quadrato ex e b; erit rectangulum sub a c, c b, una cum quadrato ex e c, aequale rectangulo sub a d, d b, una cum quadrato ex d e. Igitur ut prius demonstrabimus quadrata ex a c, c b, maiora esse quadratis ex a d, d b. Quod est propositum.

Theor. 31. Propos. 43.

Quæ ex binis nominibus ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus a, b , diuisa ad punctum c , in sua nomina, ita ut $a c, c b$, sint Rationales potentia tantum commensurabiles, ut vult propos. 37. lib. huius. Dico $a b$, non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, ita ut sint etiam Rationales lineaæ potentia tantum commensurabiles. Quod si fieri potest, diuidatur iterum $a b$, in sua nomina in puncto d , non erit igitur $a b$, bifaria in puncto c , alias essent longitudine commensurabiles $a c, c b$.



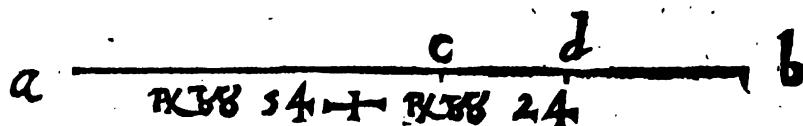
tur $a b$, diuisa bifaria in puncto c , alias essent longitudine commensurabiles $a c, c b$. Quod est contra hypothesin, ponuntur enim esse tantum commensurabiles potentia pari ratione neque $a b$, in puncto d , bifaria secabitur, cum $a d, d b$, sint tantum etiam Rationales, & potentia solùm commensurabiles. Secetur $a b$, tam in puncto c , quam in puncto d , inæqualiter, igitur partes $a c, c b$, vel minus, vel magis inæquales sunt partibus $a d, d b$, ac propriea per lemma antecedens traditum à Claudio, quadrata ex $a c, c b$, quadratis ex $a d, d b$, vel minora, vel maiora sunt (non enim partes $a d, d b$, vbiunque punctum d , ceciderit, partibus $a c, c b$, æquales erunt, nimirum maior maiori, & minor minori, alias hac ratione $a b$, searetur in eadem nomina, in qua secta est prima divisione, quod non ponitur.) Si verò ab æqualibus inæqualia auferantur, excessus residuorum, ablatorum excessui est æqualis, ut constat ex 16. pronunciato à Claudio tradito ad initium lib. 1. Sunt autem quadrata ex $a c, c b$, vñà cum rectangulo ex $a c, c b$, bis contento æqualia quadratis ex $a d, d b$, vñà cum rectangulo bis sub $a d, d b$, ut vult 4. propos. lib. 2. Inde fit, ut qui excessus fuerit ablati compositi ex rectarum quadratis $a c, c b$, & ablati compositi ex rectarum quadratis $a d, d b$, idem sit reliqui rectanguli bis sub $a c, c b$, & reliqui rectanguli bis sub $a d, d b$. Excessus autem compositi ex rectarum quadratis $a c, c b$, & compositi ex rectarum quadratis $a d, d b$, spatium est rationale (nam cum $a c, c b$, ex hypothesi sint Rationales, & solùm potentia commensurabiles, erunt & earum quadrata rationalia, ac proinde & compositum ex rectarum quadratis Rationale, ex iis, que à Claudio sunt tradita scholio propos. 14. lib. huius. Par ratione & compositum ex rectarum quadratis $a d, d b$, Rationale erit, Quare cum Rationale superes Rationale, Rationali, ut vult scholium Clavij propos. 27. lib. huius, manifestum est, excessum compositi ex rectarum quadratis $a c, c b$, & compositi ex rectarum quadratis $a d, d b$, spatium esse Rationale:) Igitur excessus rectangulibis sub $a c, c b$, & rectanguli sub $a d, d b$, bis, spatium etiam Rationale est. Sed rectangulum sub $a c, c b$, Rationalibus potentia solùm commensurabilib[us]. Medium est, ut docet 22. propos. lib. huius. Igitur & quod bis sub $a c, c b$, Medium quoque erit, per ea, que à Claudio traduntur in coroll. propos. 24. lib. huius. Simili arguento rectangulum bis sub $a d, d b$, Medium est. Quare cum ex 27. propos. lib. huius Medium à Medio non supereretur, Rationali, non erit excessus rectanguli bis sub $a c, c b$, nec rectanguli bis sub $a d, d b$, Rationale spatium. Sed Rationale esse demonstrauimus. Quod est absurdum. Igitur ex binis nominibus $a b$, non potest diuidi ad aliud punctum, quam ad c , in sua nomina; Sed ad vnum duntaxat punctum in sua nomina diuiditur. Quod erat ostendendum.

Theor.

Theor. 32. Propos. 44.

Qv ex binis Mediis prima ad vnum duntaxat punctum diuidit in nomina.

SIT recta $a b$, ex binis Mediis prima divisa in punto c , in sua nomina, ita ut $a c, c b$, sint Mediae potentia commensurabiles, que Rationale contineant, ut vult propos. 38. lib. huius. Dico $a b$, ad aliud punctum minimè diuidi posse in alia nomina, ita ut sint etiam duæ Mediae potentia inter se commensurabiles, facientesque rectangulum sub ipsis contentum, Rationale. Quod fieri potest, sit iterum $a b$, divisa in punto d , vbi cumque igitur occiderit punctum d , demonstra.



bimus ut in antecedenti excessum rectanguli bis sub $a c, c b$, & rectanguli bis sub $a d, d b$, eundem esse, qui compositi ex quadratis rectarum $a c, c b$, & compositi ex rectarum quadratis $a d, d b$. Atqui excessus rectanguli bis sub $a c, c b$, & excessus rectanguli bis sub $a d, d b$, spatium est Rationale, nam cum rectangulum sub $a c, c b$, ex hypothesi Rationale sit, erit & quod bis sub $a c, c b$, continetur Rationale, ut saepe diximus. Pari arguento erit rectangulum sub $a d, d b$, Rationale atque adeo & quod bis sub $a d, d b$, Igitur cum Rationale superet Rationale, Rationali, ut demonstrauit Clavius in scholio propos. 27. lib. huius, manifeste dignoscitur excessum rectanguli bis sub $a c, c b$, & rectanguli bis sub $a d, d b$, spatium esse Rationale. Igitur excessus compositi ex rectarum quadratis $a c, c b$, & excessus compositi ex rectarum quadratis $a d, d b$, spatia sunt Rationalia. Cum autem rectæ $a c, c b$, sint Mediae, & potentia commensurabiles, erunt earum quadrata Media, & commensurabilia, atque compositum ex rectarum quadratis $a c, c b$, utriusque quadrato commensurabile per 16. propos. lib. huius. Cum autem ambo quadrata illa sint Media, erit & compositum ex ipsis Medium, ex corollario Clavius propos. 24. lib. huius. Pari ratione & compositum ex rectarum quadratis $a d, d b$, Medium demonstrabimus. Sed Medium non superat Medium, Rationali, ut constat ex 27. propos. libri huius. Igitur excessus compositi ex rectarum quadratis $a c, c b$, & compositi ex rectarum quadratis $a d, d b$, spatium Rationale non est, Sed rationale ostendimus esse. Quod per absurdum non igitur $a b$, ex binis Mediis prima ad aliud punctum quam ad c , in sua nomina diuiditur, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 33. Propos. 45.

Qv ex binis Mediis secunda ad vnum duntaxat punctum diuidit in nomina.

Sit $a b$, ex binis Mediis secunda divisa in punto c , in sua nomina ita ut $a c, c b$, Mediae sint tantum potentia commensurabiles Medium continent, ut vult propos. 39. lib. huius. Dico $a b$, ad aliud punctum non posse diuidi in alia nomina, que sint etiam lineæ Mediae, & potentia commensurabiles Medium comprehendentes. Si enim fieri potest divisa sit iterum $a b$, in alia

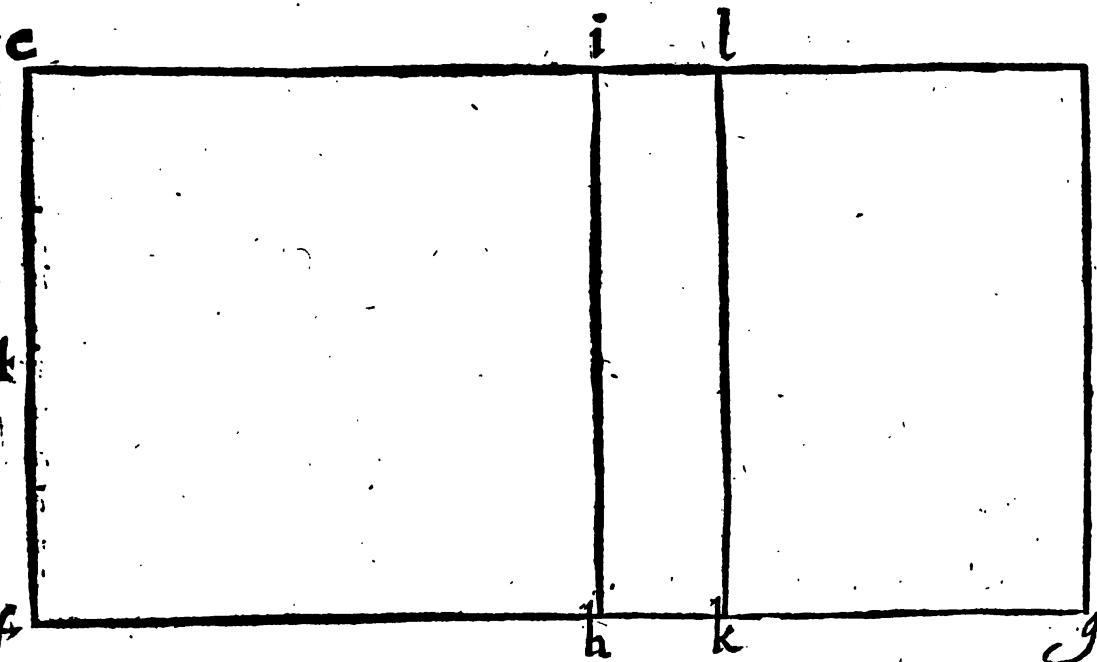
T

EVCLIDI S

nomina a d, d b, Igitur ubiunque punctum d, ceciderit, demonstrabimus ut in propos. 43. quadrata ex a c, c b, maiora esse quadratis a d, d b, vel minora. Exponatur rationalis e f, ad quam

$$\begin{array}{c} c \quad d \\ \hline a & \text{R} \text{E} \text{V} \text{ 1 } 2 \text{ 8 } + \text{ R} \text{E} \text{V} \text{ 1 } 8 \quad b \end{array}$$

applicetur rectangulum e g, quadrato a b, aequale, ad eandemque rationalem e f, aliud rectangulum applicetur aequale composito ex rectarum quadratis a c, c b, sique illud e h, erit igitur reliquum i g, aequale rectangulo bis sub a c, c b, contento. Est enim quadratum ex a b, aequale quadratus rectarum a c, c b, una cum rectangulo bis sub a c, c b, contento. Simili modo ad e f, applicetur rectangulum e k, aequale composito ex rectarum quadratis a d, d b, erit etiam reliquum l g, rectangulo bis sub a d, d b, contento, aequale. Quoniam verò quadrata ex a c, c b, inaequalia



f h, $\text{R} \text{E} \text{V} \text{ 1 } 5 \frac{1}{2}$ h g, $\text{R} \text{E} \text{V} \text{ 1 } 2$. Rectang. e h, $\text{R} \text{E} \text{V} \text{ 2 } 4 \frac{1}{2}$. Rectang. i g, $\text{R} \text{E} \text{V} \text{ 1 } 9 \frac{1}{2}$.

sunt quadratis ex a d, d b, erunt rectangula e h, e k, illis aequalia, inaequalia, recta quoque f h, f k, inaequales. Rursus cum quadrata ex a c, c b, sint maiora ex lemma Clavi propos. 39. lib. huic, rectangulo bis sub a c, c b, erit rectangulum e h, maius, quam rectangulum i g, ac proprie- ta e h, maius, quam dimidium ipsius e g, ideoque et recta f h, maior, quam dimidium ipsius f g, pari arguento demonstrabimus rectam f k, maiorem esse dimidio f g, Sunt igitur inaequa- les partes f h, h g, partibus f k, k g, singula singulis. Quoniam verò a c, c b, Media sunt, et potentia solum commensurabiles, erunt et earum quadrata, Media, et inter se commensurabi- lia. Quare compositum ex rectarum quadratis a c, c b, utique quadrato ex a c, c b, descripto commensurabile erit, per 16. propos. lib. huic sunt autem quadrata ex a c, c b, descripta, Me- dia, Igitur et compositum illud, Medium erit ex corollario Clavi propos. 24. lib. huic. Parira- tione erit et rectangulum e k, Medium, Cum rectangula e h, e k, ad Rationalem applicata faciant latitudines f h, f k, Rationales, et Rationali e f, expositae longitudine incommensura- biles, ut vult 23. propos. lib. huic. Eodem modo cum rectangulum sub a c, c b, Medium sit, erit

Ergo quod bis sub a c, c b, continetur, Medium, nimirum i g, cum sit illi commensurabile, ex eodem corollario propos. 24. Quare cum applicetur ad Rationalem b i, erit recta h g, Rationalis ipsique h i, longitudine incommensurabilis, ut docet 23. propos. lib. huius. Non alia ratione demonstrabitur rectangulum l g, Medium esse, et rectam k g, Rationalem ipsi k l, longitudine incommensurabilem. Rursus cum a c, c b, Mediae sint longitudine incommensurabiles, sique ut a c, ad c b, ita per lemma 3. Clavi propos. 19. lib. huius quadratum ex a c, ad rectangulum sub a c, c b, erit quadratum ex a c, rectangulo sub a c, c b, contento, incommensurabile, ut vult 10. propos. lib. huius. Quadrato autem ex a c, commensurabile est compositum ex rectarum quadratis a c, c b, ut iam predictum fuit. Rectangulo vero sub a c, c b, contento commensurabile est, quod bis sub a c, c b, continetur. Quare compositum ex rectarum quadratis a c, c b, hoc est rectangulum e h, incommensurabile est, per scholium Clavi propos. 10. lib. huius, rectangulo bis sub a c, c b, hoc est rectangulo i g, Igitur cum ex 1. sexti constet esse, ut rectangulum e h, ad rectangulum i g, ita recta f h, ad rectam h g, erunt f h, h g, longitudine incommensurabiles, Rationales tamen ostensa sunt: Rationales igitur sunt f h, h g, et solum potentia commensurabiles. Atque adeo et tota f g, composita ex duabus Rationalibus inter se potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis, ut docet 37. propos. lib. huius, que ex binis nominibus appellatur, diuisaque in puncto h, in sua nomina. Sed eodem argumento demonstrabimus rectam f g, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina in puncto k. Quod fieri non potest, ex iis, que ad propos. 43. sunt demonstrata. Quare a b, ex binis Mediis secunda ad unum duntaxat punctum diuiditur, ergo ostendendum.

Theor. 34. Propos. 46.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT recta a b, diuisa in sua nomina in puncto c, ita ut a c, c b, sine recta potentia incommensurabiles, que faciant compositum ex rectarum quadratis, Rationale, Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium, ut vult propos. 40. lib. huius. Dico a b, non posse diuidi ad aliud punctum, in alia nomina, que etiam sint linea incommensurabiles potentia, faciente que compositum ex ipsis quadratis, rationale, et rectangulum sub ipsis comprehensum, Medium. Quod si fieri potest diuidatur iterum a b, in alia nomina in puncto d, Igitur ubicumque eciderit punctum d, ostendemus ut in propos. 43. excessum compositi ex rectarum quadratis a c, c b, et compositi ex rectarum quadratis a d, d b, eundem esse, qui rectanguli bis sub a c, c b, et rectanguli bis sub a d, d b. At vero excessus compositi ex rectarum quadratis a c, c b, et compositi ex rectarum quadratis a d, d b, spatium est Rationale, (nam cum tam compositum ex rectarum quadratis a c, c b, quam compositum ex rectarum quadratis a d, d b, sit Rationale, erit per ea, que Clavius monstrauit scholio propos. 27. libri huius, eorum excessus spatium Rationale.) Quare et excessus rectanguli bis sub a c, c b, et rectanguli bis sub a d, d b, Rationalis est. Cum autem rectangulum sub a c, c b, ex hypothesi sit Medium, erit et eius duplum, Medium, nimirum quod bis

$$\text{a} \overline{\text{c}} \quad \text{d} \overline{\text{b}}$$

$$\text{PKB}(18 - \text{PKB}108) + \text{PKB}(18 - \text{PKB}108)$$

ri potest diuidatur iterum a b, in alia nomina in puncto d, Igitur ubicumque eciderit punctum d, ostendemus ut in propos. 43. excessum compositi ex rectarum quadratis a c, c b, et compositi ex rectarum quadratis a d, d b, eundem esse, qui rectanguli bis sub a c, c b, et rectanguli bis sub a d, d b. At vero excessus compositi ex rectarum quadratis a c, c b, et compositi ex rectarum quadratis a d, d b, spatium est Rationale, (nam cum tam compositum ex rectarum quadratis a c, c b, quam compositum ex rectarum quadratis a d, d b, sit Rationale, erit per ea, que Clavius monstrauit scholio propos. 27. libri huius, eorum excessus spatium Rationale.) Quare et excessus rectanguli bis sub a c, c b, et rectanguli bis sub a d, d b, Rationalis est. Cum autem rectangulum sub a c, c b, ex hypothesi sit Medium, erit et eius duplum, Medium, nimirum quod bis

sub a c,c b, continetur, ex corollario Clavi propos. 24. lib. huius. Pari ratione & quod bis sub a d,d b, Medium. Medium verò non superat Medium, Rationali, ut docet 27. propos. lib. huius. Quare excessus rectanguli bis sub a c,c b, nec rectanguli bis sub a d,d b, spatium est Rationale, Rationale tamen esse diximus. Quod per-absurdum. Non igitur Maior a b, ad aliud punctum quam ad c, in sua nomina diuiditur, sed ad unum duntaxat punctum in sua nomina diuidi potest. Quod erat demonstrandum.

Theor. 35. Propos. 47.

R A T I O N A L E ac Medium potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT a b, linea, Rationale, ac Medium potens, que sit diuisa in puncto c, in sua nomina, ita ut a c,c b, sint rectæ incommensurabiles potentia, facientes compositum ex ipsarum quadratis, Medium: rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale. Dico a b, non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, que sint etiam lineaæ potentia incommensurabiles, quarum compositum ex ipsarum quadratis, sit Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale. Si

$$\text{c} \quad \text{d} \quad \text{b}$$

$$\overline{\text{a}} - \overline{\text{a}(\text{R}^2 216 + \text{R}^2 72)} + \overline{\text{a}(\text{R}^2 216 - \text{R}^2 72)}$$

verò aliter fieri potest, sit iterum a b, diuisa in puncto d, in alia nomina. Igitur ubicumque punctum c, ceciderit, non secus ac in propos. 43. lib. huius ostendemus excessum rectanguli bis sub a c, c b, & rectanguli bis sub a d,d b, eundem esse, qui compositi ex rectarum quadratis a c,c b, & compositi ex rectarum quadratis a d,d b, Sed excessus rectanguli bis sub a c,c b, & excessus rectanguli bis sub a d,d b, spatium est Rationale, ut pari medio, quo vñi sumus propositione 44. lib. huius demonstrare facile est. Quare excessus compositi ex rectarum quadratis a c,c b, & compositi ex rectarum quadratis a d,d b, spatium Rationale est. Cum autem composita ex ipsarum quadratis, sint Media, Medium autem non superet Medium, Rationali, ut docet 27. propos. lib. huius, non erit eorum excessus spatium Rationale: Rationale tamen diximus. Quod absurdum. Non igitur recta a b, in sua nomina diuiditur ad aliud punctum, quam ad c, Sed a b, que Rationale, & Medium potest in unum duntaxat punctum diuiditur in sua nomina. Quod erat ostendendum.

Theor. 36. Propos. 48.

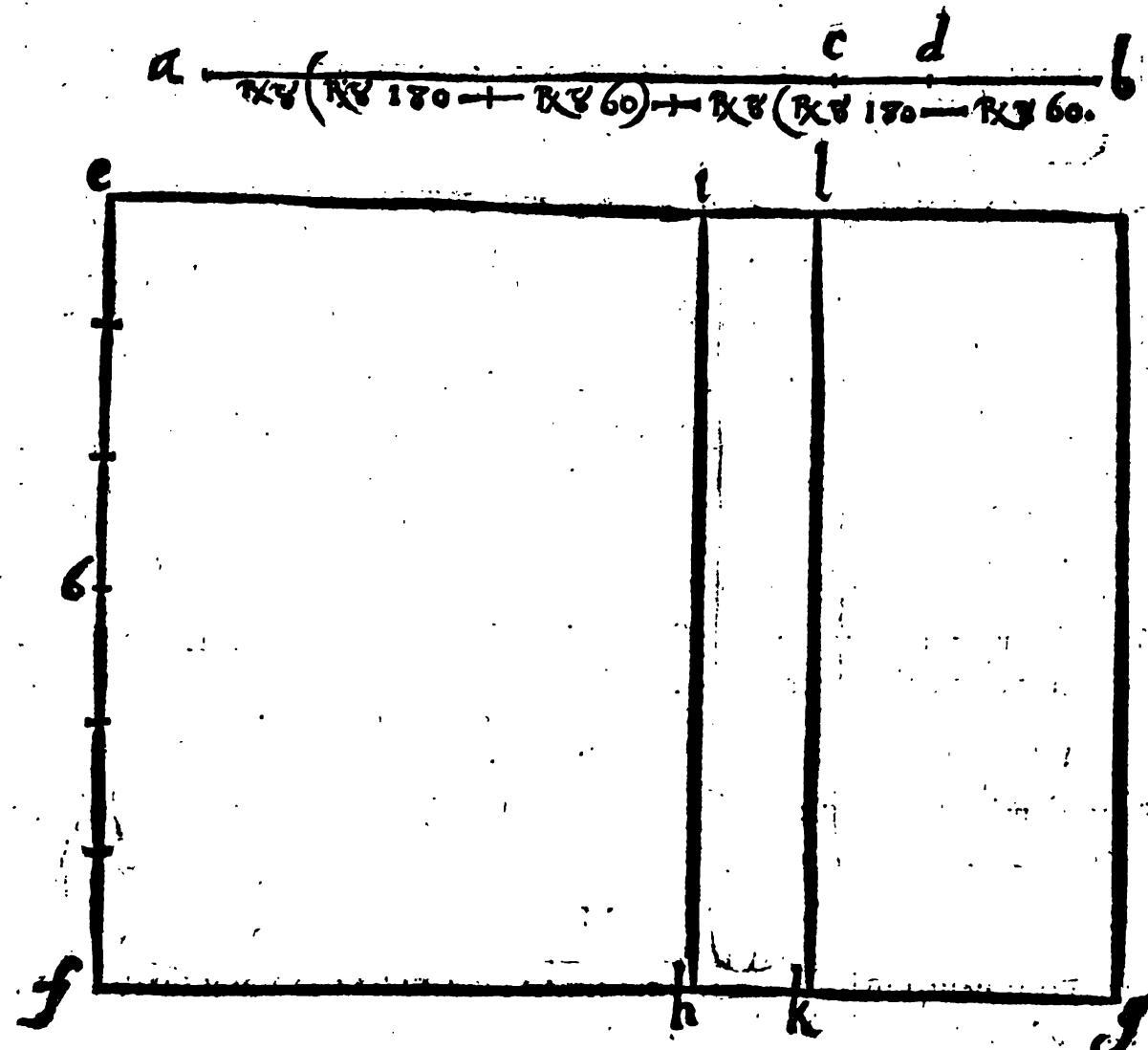
B I N A Media potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea a b, bina Media potens, diuisa in sua nomina in puncto c, ita ut a c,c b, sint rectæ potentia incommensurabiles, que faciant compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis, ut vult propos. 42. lib. huius. Dico a b, non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, que etiam sint rectæ potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis, Medium, & rectangulum sub ipsis contentum, Medium, incommensurabilèque composito ex rectarum

ELEMENTVM DECIMVM.

97

rectarum quadratis. Si enim fieri potest, dividatur iterum in alia nomina recta a b, in puncto d. Igitur ubique punctum d, extiterit, constructione facta ut in 45. propos. lib. huius demonstratur.



$fh = \frac{1}{2} \times 20$. $hg = \frac{1}{2} \times 13\frac{1}{3}$. Rectang. e h, $\frac{1}{2} \times 720$. Rectang. i g, $\frac{1}{2} \times 480$.

bimus ut ibi, partes fh, hg , partibus fk, kg , inaequales esse, singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex rectarum quadratis a c, c b, Medium ponitur, erit ergo rectangulum e h, illi aequalis. Medium, et quia rectangulum sub a c, c b, ex hypothesi Medium est, erit ergo eius duplum nempe i g, Medium, ex corollario Clavi propos. 24. lib. huius. Media autem e h, i g, ad Rationalem e f, applicata latitudines efficiunt Rationales, et ipsi Rationali exposita incommensurabiles longitudine, ut constat ex 23. propos. lib. huius. Quare rectae fh, hg , Rationales erunt ergo ipsi e f, incommensurabiles longitudine. Eadem ratione demonstrabimus rectas fk, kg , Rationales esse, ipsique e f, Rationali exposita longitudine incommensurabiles. Cum autem compositum ex rectarum quadratis a c, c b, ex hypothesi incommensurabile sit rectangulo bis sub a c, c b, erunt rectangula e h, i g, inter se incommensurabilia (est enim e h, composite ex rectarum quadratis a c, c b, aequale et i g, rectangulo bis sub a c, c b.) Quoniam vero ex 1. propos. lib. 6. constat esse, ut rectangulum e h, ad rectangulum i g, ita recta fh , ad rectam hg , erunt ideo rectae fh, hg , incommensurabiles. Nam vero Rationales sunt ostensa; Igitur fh, hg , Rationales

V

sunt, ex solū potētia commensurabiles. Quare tota $f g$, ex duabus Rationalibus potētia commensurabilib[us] composita Irrationalis erit, ut constat ex 37. propos. lib. huius, ex diuisa in sua nomina in puncto h . Non aliter demonstrabimus rectam $f g$, sectam esse in alia nomina in puncto k . Quod per absurdum, ut constat ex 43. propos. lib. huius. Quare recta $a b$, bina Media potētia, non potest diuidi ad aliud punctum, quam ad c , in sua nomina, Imò ad unum duntaxat punctum diuiditur. Quod erat demonstrandum.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius malus nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

Si quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

Si verò minus nomen expositæ Rationali longitudine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secunda.

III.

QUOD si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile exposita Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

Rursus si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IV.

Si quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

Si verò minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QUOD si neutrum ipsorum nominum; Vocetur sexta.

SCHOLIUM CLAVII.

NUMERVS dictarum fractionum, que ex binis nominibus appellantur, colliguntur hac ratione. Quoniam nominantur,

que ex binis nominibus discetur, sunt linea. Rationales potentia tantum commensurabiles, non poterit utramque nomen expofitae Rationali commensurabile esse longitudine; (aliis enim nomina ipsa effent quoque linea longitudine inter se commensurabiles, ut in Scholio propos. 12. huius libri doctum, quod non ponitur.) Sed vel unum tantum, nempe maius aut minus, vel neutrum: Atque ita tria genera confingunt linearum, que ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina in qualib[us] sunt; (aliis enim effent linea et inter se longitudine commensurabiles, quod non ponitur) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato linea fibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato linea longitudine fibi commensurabilis, constituentur, una cum tribus dictis generibus, tres diversae linea ex binis nominibus, numerum prima, secunda, et tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato linea longitudine fibi incommensurabilis, efficiuntur una cum eisdem tribus generibus aliae tres diversae linea ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, et sexta, ut ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diversae linea ex binis nominibus appellatae.

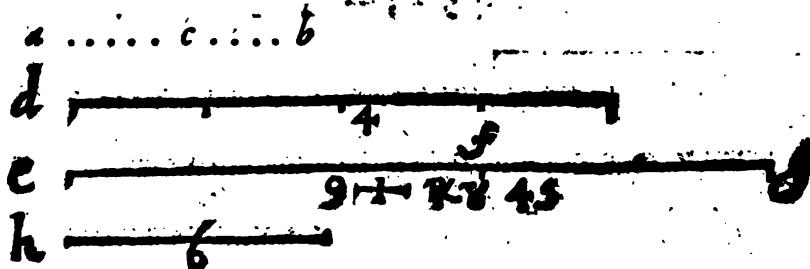
Palebræ autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ linea fibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquias, in quibus minus nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ linea fibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile, antecedit incommensurabile, ut manifestum est.

Rursus rectæ adhuc inter linea ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expofita linea Rationali; et secundam in qua minus nomen eadem Rationali linea expofita longitudine est commensurabile, quoniam minus natura antecedit minus, cum minus à maiori continetur; tertiam vero, in qua neutrum ipsum nominum expofita Rationali longitudine est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam applicans; secundam, quiniam; et tertiam, sextam.

Probl. 13. Propos. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam:

R E P E R T I S duobus numeris quadratis a b, c b, id est 9. et 4. quorum excessus a c, nimis 5. non sit quadratus ita ut 9. et 4. habeant rationem, quam numeri quadrati. At vero 9. et 5. non habeant proportionem numerorum quadratorum. Deinde exponatur Rationalis d, cui etiam longitudine commensurabilis sit recta e f. Erit igitur e f, Rationali d, commensurabilis longitudine Rationalis. Fiat iterum ut numerus a b, id est 9. ad numerum a c, id est 5. ita per



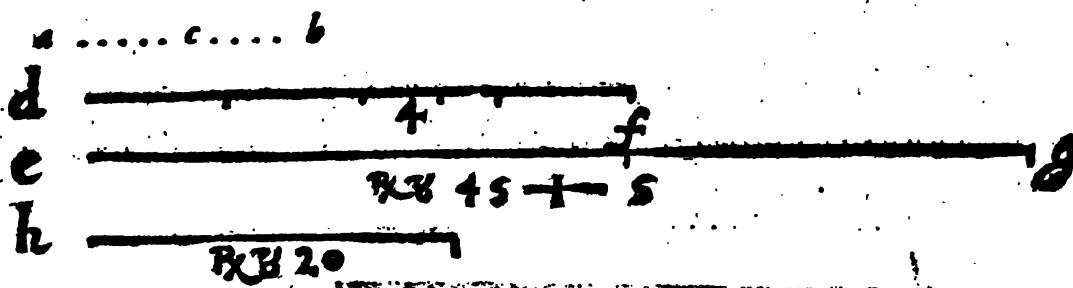
corollarium Clavi propos. 6. lib. huius, quadratum ex e f; ad quadratum ex f g, Dico rectam e g, esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex e f, f g, sunt commensurabilia eandem rationem habentia inter se, quam numeri 9. et 5. erunt et rectæ e f, f g, saltem potentia commensurabiles, ut constat ex 6. propos. lib. huius. Rationalis autem est ostensa e f; Rationalis igitur erit et f g, que illi est commensurabilis. Sed quia numeri 9. et 5. non habent rationem, quam numeri quadrati habent, ideo nec quadrata ex e f, f g, rationem habere possunt, quam numerus quadratus haber ad numerum quadratum: Quare per 9. propos. lib. huius, rectæ e f, f g, longitudine sunt incommensurabiles. Igitur e f, f g, Rationales sunt, et tantum potentia commensurabiles. Atque adeo et tota e g, composta ex duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus. Irrationalis erit, per 37. propos. lib. huius. Dico et primam esse. Nam cum sit, ut numerus quadratus 9. ad numerum non quadratum 5. ita quadratum ex e f, ad quadratum ex f g. Sit autem numerus 9. maior, quam 5. erit et quadratum ex e f, maius, quam quadratum ex f g. Sit igitur maius quadrato rectæ h, ex lemmate Clavi propos. 14. lib. huius. Igitur cum sit ut 9. ad 5. ita quadratum ex e f, ad quadratum ex f g, erit quoque per conuerzionem ra-

tionis ut a b, ad e b, id est, ut 9. ad 4. videlicet ad excessum, quo antecedens a b, 9. superat consequiem 5. ita quadratum e f, ad quadratum ex h, non irum ad excessum, quo antecedens quadratum e f, superat consequens quadratum f g. Numerus quem 9. ad 4. habet Rationem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Quare quadrata ex e f, et h, eandem habebunt rationem inter se, ac proinde recta e f, et h, longitudine sunt commensurabiles, ut vult 9. propos. lib. huic. Quia vero maius nomen e f, plus potest, quam minus f g, quadrato recta h, sibi longitudine commensurabilis, sique maius nomen e f, Rationali d, exposita longitudine commensurabile, erit ex prima definitione, definitionum secundorum, recta e g, ex binis nominibus prima. Invenia est igitur ex binis nominibus prima. Quod erat faciendum.

Probl. 14. Propos. 50.

I N V E N I R E ex binis nominibus secundam.

R E P E R T I S duobus numeris quadratis a b, et b, id est 9. et 4. ut in antecedenti propositione Exponatur Rationalis quadam d, et ei longitudine commensurabilis sumatur alia f g, erit igitur et f g, Rationali d, commensurabilis, Rationalis. Deinde fiat ut numerus a c, id est 5. ad numerum a b, id est 9. ita per corollarium Clavi propos. 6 lib. huic, quadratum ex f g, ad quadratum ex e f. Dico et f g, esse ex binis nominibus secundam. Nam cum quadrata ex f g, et



e f, eandem habent proportionem, quam numeri 5. et 9. sunt commensurabiles per 6. propos. lib. huic, et recta f g, et e f, saltet potentia commensurabiles. Sed f g, Rationalis est ostensa, igitur e f, Rationalis est. Quia vero 5. et 9. non habent proportionem, quam numeri quadrati habent. Ideo nec quadrata ex f g, et f, eandem rationem habebunt recta igitur f g, et e f, incommensurabiles sunt longitudine, ut vult 9. propos. lib. huic. Sed rationales sunt ostensa. Igitur f g, et e f, Rationales sunt, et solum commensurabiles potentia; Atque adeo tota e g, ex duabus Rationalibus tantum potentia commensurabilibus composita Irrationalis est per 37. propos. lib. huic, et ex binis nominibus dicitur. Dico et f g, secundam esse. Nam cum sit ut numerus 5. ad 9. ita quadratum ex f g, ad quadratum ex e f, et conuertendo ut 9. ad 5. ita quadratum ex e f, ad quadratum ex f g. Sit autem numerus 9. maior numero 5. erit et f g quadratum ex e f, maius quadrato ex f g. Sit igitur maius quadrato recta h, ex lemmate Clavi propos. 14. lib. huic. Igitur ut in antecedenti demonstrabatur rectam h, longitudine esse commensurabilera recta e f. Quare cum maius nomen e f, plus possit, quam minus f g, quadrato recta h, sibi longitudine commensurabilis, sique maius nomen e f, Rationali d, exposita longitudine incommensurabile, minus vero eidem Rationali commensurabile longitudine, erit recta e g, ex binis nominibus secunda, ut vult a definitione secundaria definitionum. Invenia est igitur, et c. Quod erat faciendum.

Probl.

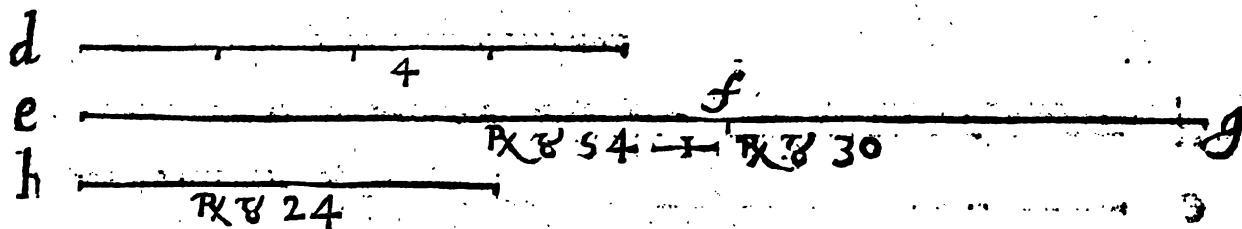
Probl. 15. Propos. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis a^2, b^2 , id est 9, et 4. ut in propos. 49. Suntur alius numerus i. id est 6. qui nec ad 9. nec ad 4. habeat rationem, quam numeri quadrati habent inter se, quod facile fieri, si sumatur 6. non quadratus, qui proxime est maior, quam 5. Nam cum non sit quadratus, non habebit ad numerum quadratum a^2, b^2 , rationem numerorum quadratorum. Rursus cum 6. non quadratus sit proxime maior, quam a^2, b^2 , id est 5. differet vel sola unitate, vel binario, (unitate quidem quando a^2, b^2 , numerus fuerit, cui addita unitas quadratum non facit; Binario vero, quando unitas addita ad a^2, b^2 , quadratum facit, ut si numerus a^2, b^2 , sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia unitas addita ad 8. facit numerum quadratum 9. Si vero a^2, b^2 , sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. qui a 5. differt unitate, unitas enim addita ad 5. facit 6. numerum non quadratum, &c.) Quare ut Clavius

$$a \dots \dots c \dots \dots b$$

$$i \dots \dots$$



demonstrauit in scholio propos. 8. lib. 8. inter i^2, a^2, b^2 , id est inter 5. et 6. non cadet medius proportionalis, Igitur nec plani similes, atque adeo non habebunt rationem, quam quadrati numeri inter se habent. Exponatur Rationalis quedam d^2 , et fiat per corollarium Clavius propos. 6. lib. huius ut numerus 6. ad 9. ita quadratum ex d^2 , ad quadratum ex e^2, f^2 , erunt igitur quadrata ex rectis d^2, e^2, f^2 , commensurabilia, ut vult propos. 6. lib. huius, atque adeo d^2, e^2, f^2 , alterum potentia commensurabiles. Existente igitur d^2 , Rationali, erit e^2, f^2 , ei commensurabilis, Rationalis. Quoniam vero 6. et 9. hoc est quadrasum ex d^2 , ad quadratum ex e^2, f^2 , non habet rationem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, erunt rectae d^2, e^2, f^2 , longitudine incommensurabiles, ut constat ex 9. propos. lib. huius. Rursus ex eodem corollario Clavius propos. 6. lib. huius, fiat ut a^2, b^2 , ad a^2, c^2 , id est ut 9. ad 5. ita quadratum ex e^2, f^2 , ad quadratum ex f^2, g^2 , erunt igitur quadrata ex rectis e^2, f^2, f^2, g^2 , commensurabilia, ex 6. propos. lib. rectae quoque e^2, f^2, f^2, g^2 , saltem potentia commensurabiles. Quare cum e^2, f^2 , Rationalis sit ostensa, erit e^2, f^2, f^2, g^2 , ei commensurabilis, Rationalis. Quoniam vero 9. ad 5. hoc est quadratum ex e^2, f^2 , ad quadratum ex f^2, g^2 , proportionem numerorum quadratorum non habet, erunt ex 9. propos. lib. huius rectae e^2, f^2, f^2, g^2 , longitudine incommensurabiles. Quare e^2, f^2, f^2, g^2 , Rationales sunt, et tantum potentia inter se commensurabiles. Atque idcirco tota e^2, f^2, g^2 , Irrationalis per 37. propos. lib. huius, que ex binis nominibus dicitur. Dico et tertiam esse. Nam cum sit ut numerus 6. ad 9. ita quadratum ex d^2 , ad quadratum ex e^2, f^2 , et ut 9. ad 5. ita quadratum ex e^2, f^2 , ad quadratum ex f^2, g^2 , erit ex aequo ut 6. ad 9. ita quadratum ex d^2 , ad quadratum ex e^2, f^2 , non habent autem 6. et 9. rationem numerorum quadratorum, Igitur nec quadrata ex d^2, e^2, f^2, g^2 , tandem inter se proportionem habebunt: Quare rectae d^2, e^2, f^2, g^2 , incommensurabiles sunt longitudine, ut colligitur ex 9. propos. lib. huius. Cum autem sit ut a^2, b^2 , id est 9. ad a^2, c^2 , id est 5. ita quadratum ex e^2, f^2 , ad quadratum ex f^2, g^2 , sit autem 9. maior, quam

5. erit & quadratum ex e f, maius, quam quadratum ex f g, sit maius quadrato rectae h, ex lemma Clavi propos. 14. lib. huius. Igitur faciliter demonstrabimus, ut in propos. 49. lib. huius rectas h, & e f, esse longitudine commensurabiles: Quoniam vero nomen e f, plus potest, quam minus quadrato rectae h, sibi commensurabilis longitudine, sitque tam e f, quam f g. Rationali d, expositae incommensurabilis longitudine, erit e g, ex definitione tertia, secundarum definitionum ex binis nominibus tertia. Inuenta est ergo ex binis nominibus tertia. Quod erat faciendum.

Probl. 16. Propos. 52.

I N V E N I R E ex binis nominibus quartam.

R E P E R T I S duobus numeris a c, c b, id est 5, & 3, ita ut ex illis compositus nimis 9. ad neutrum ipsorum rationem habeat quam quadratus numerus ad numerum quadratum ex iis, quae Clavius tradidit scholio 3. propos. 19. lib. huius. Exponatur deinde Rationalis quedam d, cui sumatur alia e f, ei longitudine commensurabilis, erit & e f, Rationalis. Si vero reliqua construantur ut in propos. 49. huius lib. demonstrabimus ut ibi, totam e g, esse ex binis nominibus.

$$a \dots \dots c \dots b$$

$$\begin{array}{ccccccc} d & - & & 4 & & f & \\ e & - & & & & & \\ h & - & & 9 + \cancel{r} \cancel{b} & 5 & 4 & \\ & & & \cancel{r} \cancel{b} 2 & 7 & & \end{array}$$

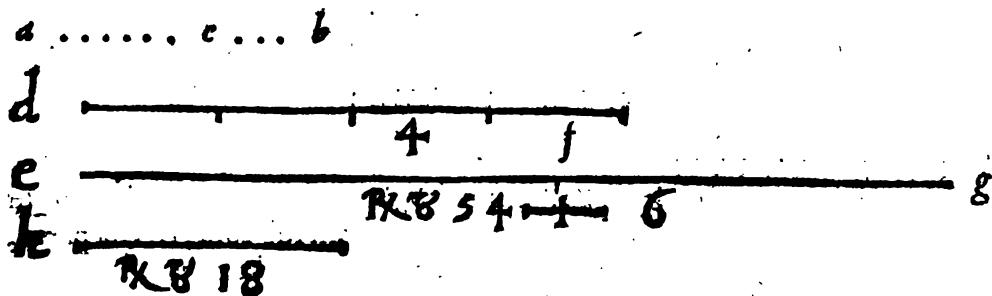
Dico & quartam esse. Nam ut in propos. 49. lib. huius, erit quadratum ex e f, maius, quam quadratum ex f g. Sit igitur maius quadrato rectae h, Igitur ut iam demonstravimus in propos. 49. cum sit per conuersionem rationis, ut a b, ad c b, id est ut 9. ad 3. ita quadratum ex e f, ad quadratum ex h. Non est autem 9. ad 3. eadem ratio, que numeri quadrati ad numerum quadratum, igitur nec quadratum ex e f, ad quadratum ex h, eandem habebit proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum haber. Quare rectae e f, & h, longitudine sunt incommensurabiles, ut vult 9. propos. lib. huius. Cum igitur maius nomen e f, plus possit, quam minus f g, quadrato rectae h, sibi incommensurabilis longitudine, sitque maius nomen Rationali d, expositae longitudine commensurabile, erit ex definitione quarta, secundarum definitionum recta e g, ex binis nominibus quarta. Inuenta est ergo ex binis nominibus quarta. Quod erat faciendum.

Probl. 17. Propos. 53.

I N V E N I R E ex binis nominibus quintam.

R E P E R T I S duobus numeris a c, c b, Ita ut compositus ex illis, ad neutrum ipsorum habeat rationem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum, & reliqua construantur ut in propos. 50. lib. huius, ostendemus, ut in 50. illa propos. rectam e g, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo ut in illa 50. propos. quadratum ex e f, maius esse quadrato f g. Sit igitur maius quadrato rectae h, ex lemma Clavi propos. 14. lib.

bis. Igmar. cùm in propos. 49. ostensum sit esse per conversionem rationis ut $a:b$, ad $c:b$, id est quod 3. ita quadratum ex $e:f$, ad quadratum ex b . Demonstrabimus ut in antecedenti rectas

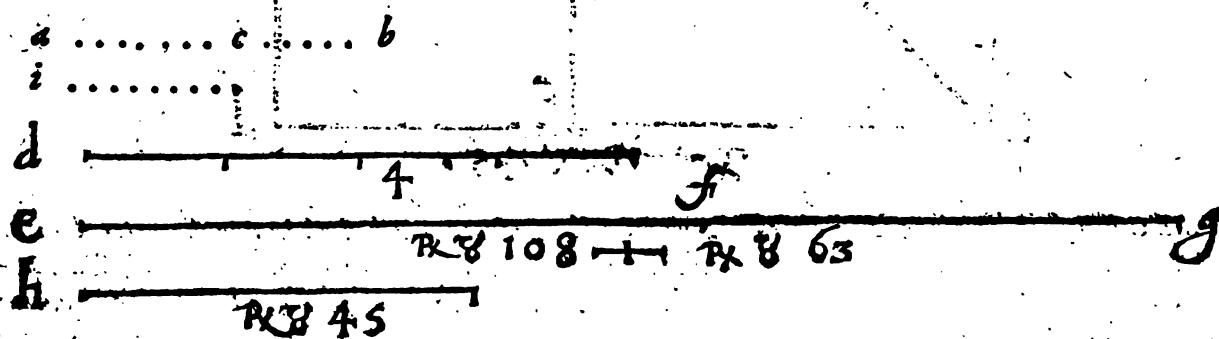


$e:f$, & b , esse longitudine inter se incommensurabiles. Quocirca cum maius nomen $e:f$, plus posse, quam minus $f:g$, quadrato recte b , fibi longitudine incommensurabilis, siveque minus nomen Rationali d , exposita longitudine commensurabile, erit ex definitione quinta, secundarum definitionum recta $e:g$, ex binis nominibus quinta. Invenia est ergo ex binis nominibus quinta. Quod erat faciendum.

Probl. 18. Propos. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris $a:c$, $c:b$, id est 7. & 5. plani non similes, quorum neuter quadratus sit, nec etiam compositus ex ipsis 12. sit quadratus, habeaturque ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadrati numeri, quod fieri si numerus quilibet quadratus sit diuisus in numeros primos inter se. Haec enim ratione, totus ad utrumque ipsorum erit primus ex 30. propos. lib. 7. atque idcirco non habebit ad illos proportionem quadratorum, ut docuit Clavius ad fin-

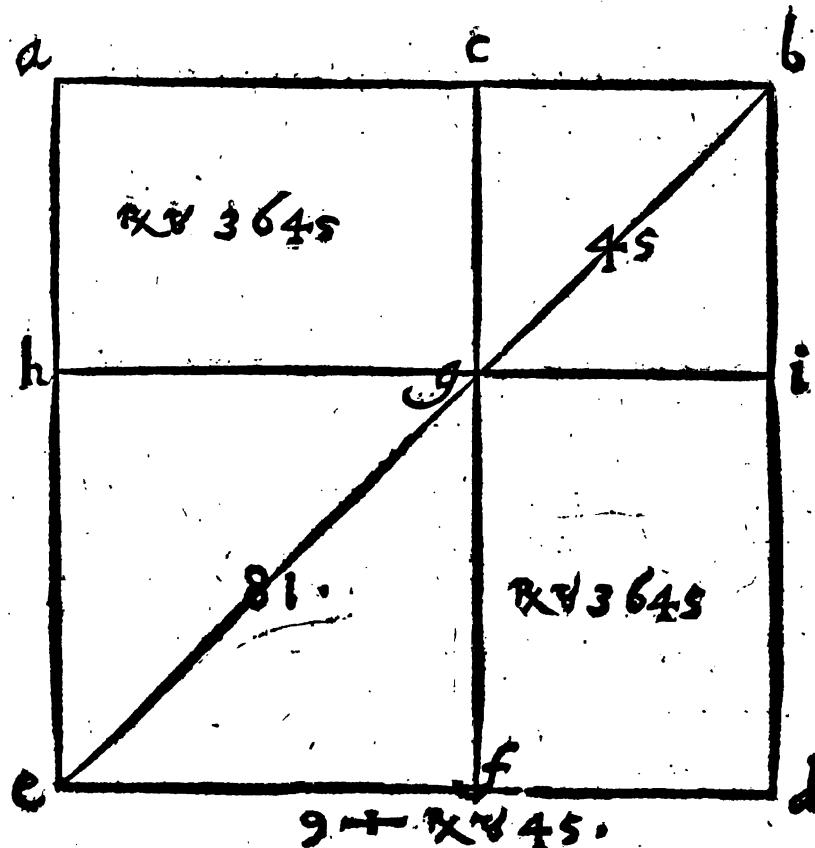


nem libri 8. Sumatur deinde quicumque numerus i. id est 9. qui nec ad 12, nec ad 7. habeat rationem, quam numeri quadrati habent qualem est quiuis numerus quadratus, ille enim non habebit ad non quadratos 12, & 7. rationem quadratorum numerorum. Exponatur Rationalis d , fiatque ut $9:ad 12$. ita quadratum ex d , ad quadratum ex $e:f$, ex coroll. Claviij propos. 6. lib. huius, & reliqua construantur ut in propos. 51. huius lib. Demonstrabimus igitur ut ibi rectas d , & $e:f$, esse longitudine incommensurabiles. Atque adeo totam $e:g$, esse ex binis nominibus. Dico & sextam esse. Similiter ut in propos. 51. lib. huius demonstrabimus rectas d , & $f:g$, esse longitudine incommensurabiles, esseque quadratum ex $e:f$, maius quadrato $f:g$, quadrato recta b . Quarecum propositione 49. sit ostensum esse per conversionem rationis, ut $a:b$, ad $c:b$, id est 12. ad 5. ita quadratum ex $e:f$, ad quadratum ex b . Non habent autem 12. & 5. rationem quadratorum numerorum, nec etiam quadrata ex $e:f$, & b , erunt ideo recta $e:f$, & b , longitudine in-

commensurabiles, ut constat ex 9. propos. lib. huius. Igitur cum maius nomen e f, plus possit, quam minus f g, quadrato recta h, sibi longitudine incommensurabilis, nearrumque ipsorum nominum Rationali d, exp. sita longitudine sit commensurable, erit tota e g, ex sexta definitio- ne, secundarum definitionum ex binis nominibus sexta. Inuenta est ergo, &c. Quod erat facien- dum.

LEMMA CLAVII.

Si recta linea secata sit vtcunque erit rectangulum sub partibus contentum medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & una parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis:



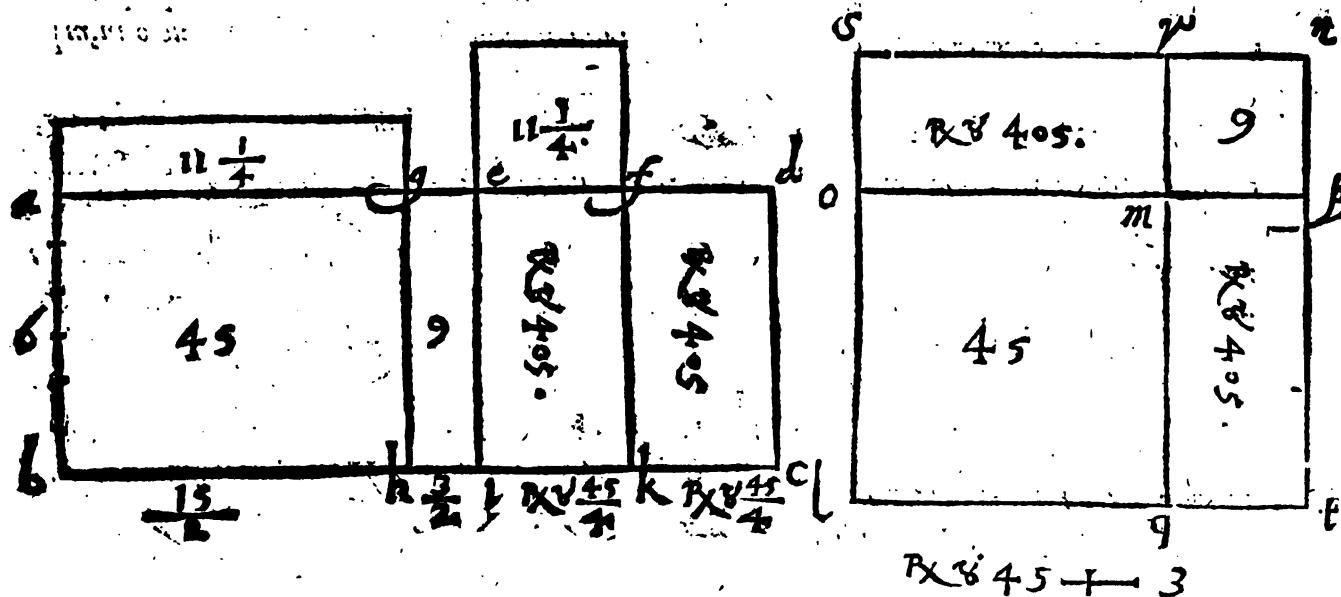
S E C T A sit $a b$, utcunq; in c . Describatur ex $a b$, quadratum $a b d e$, in quo diameter ducatur $b e$. Ducta autem ex c , recta $c f$, ipsi $b d$, parallela, que diametrum fecet in g , agatur per g , ipsi $a b$, parallela $h i$. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2. $f h, c i$, quadrata partium $a c, c b$, utrumque autem rectangulum $d g, g a$, comprehensum eisdem partibus. At verò rectangula $c d, a i$, sub tota $a b$, & parte $c b$, contenta. Dico $d g$, medium proportionale esse inter quadrata $f h, c i$; At $c d$, medium esse proportionale inter quadrata $a d, c i$. Quoniam enim ut $h g$, ad $g i$, ita est tām $f h$, ad $d g$, quam $a g$, ad $c i$, erit ut $f h$, ad $d g$, ita $a g$, ad $c i$. Est autem $a g$, ipsi $d g$, aequale. Igitur erit quoque ut $f h$, ad $d g$, ita $d g$, ad $c i$. Atque adeò $d g$, medium proportionale est inter quadrata $f h, c i$. Rursus quia est ut $a b$, ad $c b$, ita tām $a d$, ad $c d$; quam $a i$, ad $c i$, erit ut $a d$, ad $c d$, ita $a i$, ad $c i$. Est autem $a i$, ipsi $c d$, aequale. Igitur erit ut $a d$, ad $c d$, ita quoque $c d$, ad $c i$. Quare $c d$, medium proportionale est inter quadrata $a d, c i$. Eodem modo erit $a f$, medium proportionale inter quadrata $a d, f h$.

Theor. 37. Propos. 55.

Si spatum continetur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatum potens, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CON-

C O N T I N E A T V R spatium a c, sub Rationali a b, & ex binis nominibus prima a d. Dico rectam, quæ spatium a c, posse, esse Irrationale, quæ ex binis nominibus dicitur. Sit enim ipius a d, maius nomen a e, erunt igitur a e, e d, Rationales, & solum potentia commensurabiles, & maius nomen a e, plus poterit, quam minus e d, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & denique maius nomen a e, Rationali exposita longitudine erit commensurabilis, ex definitione prima secundarum definitionum. Secetur minus nomen e d, bifariam in puncto f, igitur cum maius nomen a e, plus possit, quam minus e d, quadrato rectæ sibi longitu-



~~total ad, 9 - Bx 3 45.~~

Ex binis nominibus quinta.

dine commensurabilis, si quare parti quadrati ex minori linea c d , descripti aequali parallelogrammum applicetur ad maiorem a e , deficiens figura quadrata, in partes longitudine commensurabiles ipsam dividet, ut constat ex 18. propos. lib. huius. Quare partes a g ; g e , inter se sunt longitudine commensurabiles, Ducantur iam per puncta g , e , f , ipsis a b ; d c , parallela recta g h , e i , f k , ex parallelogrammo a b , aequali describarunt quadratum l m : At parallelogrammo g i , aequali sit quadratum m n , sintque quadrata illa ita coniuncta ad angulum m ; ut latera m o , m p , unam tantum rectam lineam constituant nimirum o p , facient etiam ex latera q m , m r , unam rectam q r ; ut ex Proculo demonstrauit Clavius propos. 15. lib. 1. propterea quod anguli o m q , p m r , sunt ad verticem m ; aequales, nimirum recti, completo deinde rectangulo l n , cum rectae o m , m p , rectis q m , m r , aequales sint. Ideoque ex tota o p , roti q r . Sit autem o p , ipsis f n , l t , ex q r , ipsis l s , t n , aequalis, equilaterum erit, rectangulum l n , id est quadratum; ut constat ex 34. lib. primi. Nunc vero quoniam rectangulum sub a g , g e , aequali est ex constructione quadrato ex e f , erit ut a g , ad e f , ita e f , ad g e ; ex 17. propos. lib. 6. cum tres ille sint continue proportionales. Atque adeo per 1. propos. lib. 6. ut a b , ad e k , ita e k , ad g i . Quare rectangulum e k , medium proportionale est, inter rectangula a b , g i , id est inter quadrata l m , m n , quae illis sunt aequalia. Sed inter quadrata l m , m n , medium est proportionale rectangulum s m , ex lemmate Claviij propos. antecedentis. Igitur rectangulum t m , aequali est rectangulo e k . Cum autem rectangulo t m , aequali sit rectangulum m s , ex rectangulo e k , aequali sit rectangulum f c , erit ex rectangulum m s , rectangulo f c , aequali, ut colligitur ex 43. propos. lib. 1. ex 36. eiusdem. Quare rotum quadratum l n , roti rectangulo a c , aequali est. Atque adeo recta

Y

$\circ p$, potest spatium contentum sub Rationali a b, & ex binis nominibus prima a d, numerum rectangulum a c. Dico rectam o p, esse Irrationalem, quae ex binis nominibus appellatur.

Quoniam enim recta a g, g e, sunt ostensa longitudine commensurabiles, erit tota a e, utriusque ipsarum longitudine commensurabilitas, ex 16. propos. lib. huic. Quare cum iaceat maius nomen a e, Rationali exposita a b, ostensa sit longitudine commensurabile, erunt ergo a e, g e, eidem Rationali a b, longitudine commensurabiles ex scholio Clavi propos. 12. lib. huic. Atque ideo cum recta a b, sit Rationalis, erunt ergo a g, g e, Rationales. Igitur rectangula a b, g i, contenta sub Rationalibus longitudine inter se commensurabilibus, Rationalia sunt, ex 20. propos. lib. huic. Atque adeo, & quadrata l m, m n, illis aequalia, Rationalia erunt, recta quoque o m, m p, Rationales.

Quoniam vero recta a e, rectae e, d, incommensurabilia est longitudine, sit autem recta a g, ostensa commensurabilis longitudine recta a e, & ipsi e d, longitudine sit commensurabilis recta a f, cum sit eius dimidia, erunt ex scholio Clavi propos. 14. lib. huic recta a g, & e f, longitudine inter se incommensurabiles, rectangula tamen a b, e f, eandem proportionem habentia, quam recta a g, e f, incommensurabilia sunt, ut videlicet 1. propos. lib. 6. ac prinde ergo quadratum l m, & rectangulum m t, illis aequalia incommensurabilita. Quare recta a m, m p, longitudine sunt incommensurabiles, cum eandem proportionem habeant, quam rectangula l m, m t, sunt autem recta o m, m p, Rationales ostensa, Rationales igitur sunt o m, m p. Et solum potentia commensurabiles: Quapropter tota o p, potens spatium a e, Irrationalis est, quae ex binis nominibus dicitur. Si spatium igitur contineatur sub Rationali, ergo. Quod erat ostendendum.

Theor. 38. Propos. 56.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda; Recta linea spatium potens, Irrationalis est, quae ex binis Mediis prima appellatur.

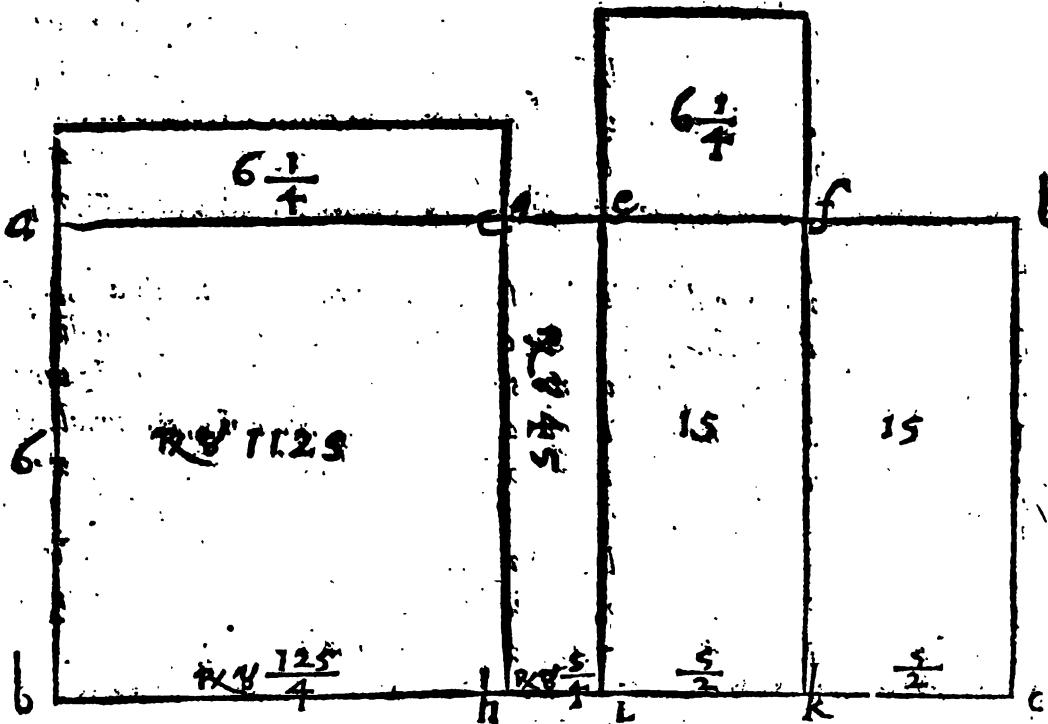
CONTINEATVR spatium a c, sub Rationali a b, & ex binis nominibus secunda a d. Dico rectam, quae spatium a c, potest, esse Irrationalem, quae ex binis Mediis prima dicatur. Sit ipsis a d, maius nomen a e, erunt igitur a e, e d, Rationales, & solum potentia commensurabiles, & maius nomen a e, plus poserit, quam minus e d, quadrato recte sibi commensurabilis longitudine, & demique minus nomen e d, Rationali a b, exposita longitudine erit commensurabile. Secetur e d, bifariam in puncto f, & reliqua construantur ut in precedenti propositione. Quo facto demonstrabimus ut ibi rectam o p, posse spatium a c, contentum sub Rationali a b, & ex binis nominibus secunda a d. Dico o p, Irrationalem esse, quae ex binis Mediis prima appellatur.

Quoniam enim a e, & e d, sunt longitudine incommensurabiles, sique e d, longitudine commensurabilis Rationali a b, exposita, erunt ex 13. propos. lib. huic recta a e, & a b, longitudine incommensurabiles, & quoniam recta a g, g e, in antecedenti propositione ostensa sunt longitudine commensurabiles, erit tota a e, utriusque ipsarum commensurabilis longitudine, ut videlicet 16. propos. lib. Igitur cum maius nomen a e, sit Rationale, erunt a g, g e, Rationales. Cum autem veraque a g, g e, longitudine sit commensurabilis ipsis a e, sit vero a e, incommensurabilis longitudine Rationali a b, exposita, erunt a g, g e, eidem Rationali a b, incommensurabiles longitudine, Quare tamen a b, & a g, quam a b, g e, erunt Rationales solum potentia commensura-

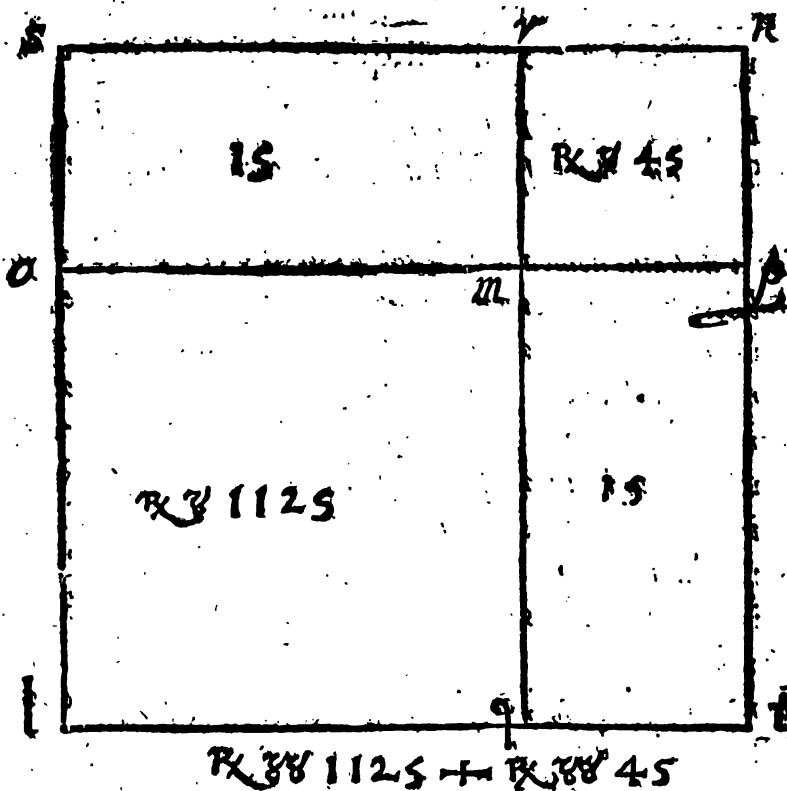
ELEMENTVM DECIMVM.

87

biles, et idco rectangula a h, g, i, contenta sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Media omnia, ut colligitur ex 22. propos. lib. huic, et propterea quadrata l m, m n, illis



$$\text{area } a + \text{area } b = 45 + 5$$



Ex his Medium prima.

aqualia, Media, Recta quoque o m, m p, Media sunt. Quoniam vero recte a g, g e, longitudine commensurabiles demonstrare sunt, erunt et rectangula a h, g, i, eandem cum illis proportionem habentia commensurabilia, atque idcirco et quadrata l m, m n, illis aequalia commensura-

bilia sunt. Rectæ quoque o m, m p, saltem potentia commensurabiles. Cum autem a e, & e d, sint inter se longitudine incommensurabiles, ipsi vero a e, ostensa sit commensurabilis longitudine a g, & ipsi e d, longitudine sit commensurabilis e f, eius dimidia, erunt ex scholio propos. 14. lib. huius à Claudio tradito rectæ a g, e f, incommensurabiles longitudine, ac propterea rectangula a b, e k, eandem cum illis proportionem habentia incommensurabilia, ut docet 10. propos. lib. huius. Igitur l m, m t, ipsis a b, e k, equalia incommensurabilia sunt, & rectæ o m, m p, eandem inter se proportionem habentes longitudine incommensurabiles. Cum autem rectæ o m, m p, Medias esse iam sit ostensum, easque inter se commensurabiles, erunt rectæ o m, m p, Media solùm commensurabiles potentia.

Rursus cum minus nomen e d, longitudine sit commensurabile Rationali a b, exposita, vel Rationali e i, que equalis existit ipsis a b, Sit etiam e f, ipsis e i, commensurabilis longitudine cum sit dimidia ipsius e d, sitque e i, Rationalis, erit & recta e f, Rationalis. Igitur rectangulum e k, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est; ut vult 20. propos. lib. huius. Rectangulum autem m t, contentum sub rectis o m, m p, aequali dist rectangulo e i, e f, contento. Igitur & m t, Rationale est. Quapropter o m, m p, Media sunt potentia commensurabiles tantum, quæ Rationale continent. Atque ideo & tota o p, Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, ut vult 38. propos. lib. huius. Si spatium igitur continetur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 39. Propos. 57.

Si spatium continetur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea spatium potens, Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

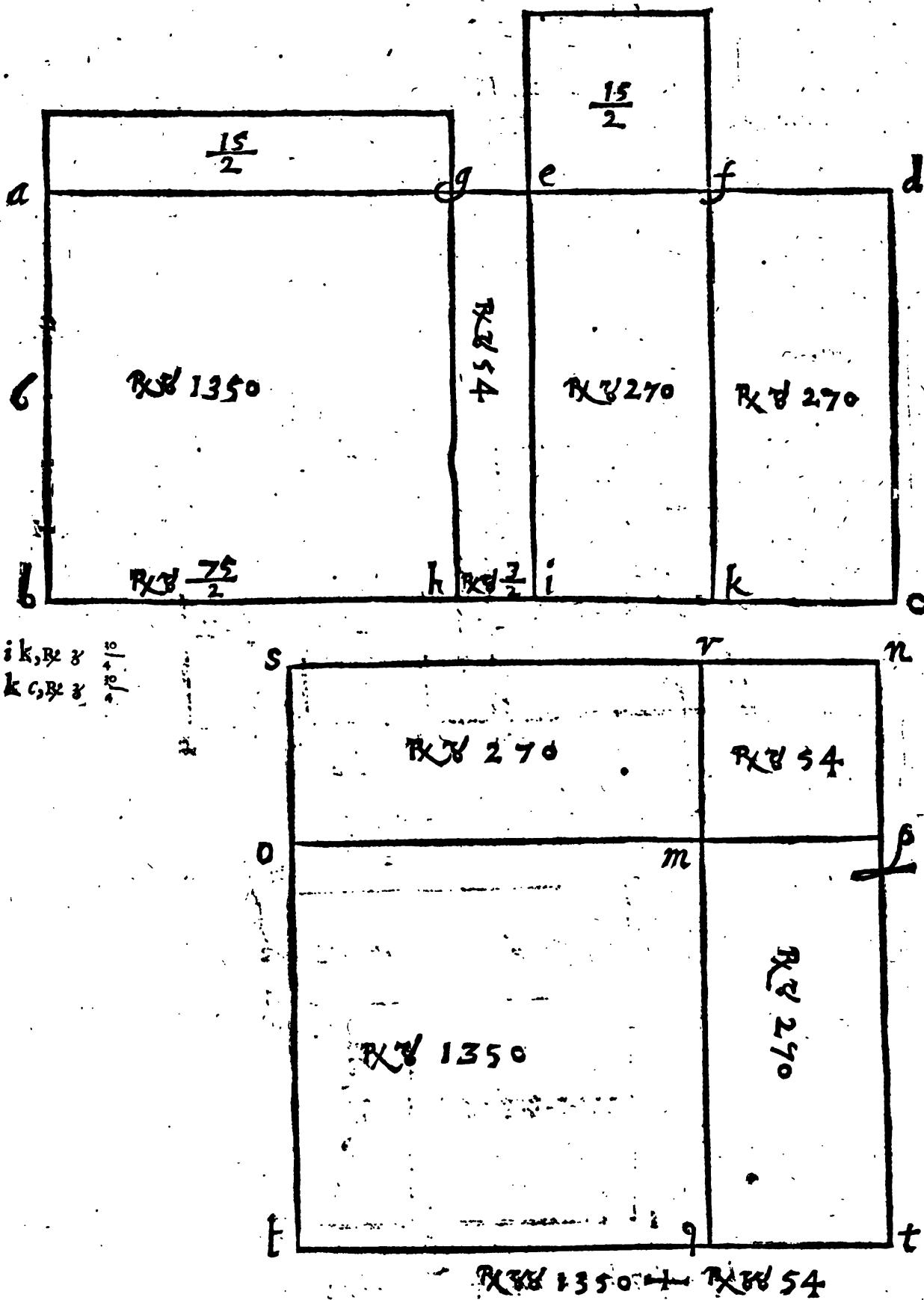
CONTINEATVR spatium a c, sub Rationali a b, & ex binis nominibus tertia a d. Dico rectam, quæ potest spatium a c, esse Irrationalem, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

Sit ipsis a d, minus nomen a e. Erunt igitur a e, & e d, Rationales, & solùm potentia commensurabiles, & minus nomen a e, plus poterit, quam minus e d, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & denique neuræ ipsarum a e, e d, Rationali a b, exposita, longitudine erit commensurabilis, ut constat ex definitione tertia secundarum definitionum. Secetur minus nomen e d, bifariam in f, & reliqua construantur, ut in propositione antecedenti. Igitur ut ibi demonstrabimus rectam o p, posse spatium contentum sub Rationali a b, & ex binis nominibus tertia a d. Similiter ostendemus ut in antecedenti propositione rectas o m, m p, Medias esse, quæ tantum potentia sunt commensurabiles, cum a e, Rationali a b, sit ex hypothese longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi eadem a e, Rationali a b, longitudine erit incommensurabilis.

Quoniam vero e d, & e f, longitudine sunt commensurabiles cum e f, sit dimidia ipsius e d, sitque e d, Rationali a b, longitudine incommensurabilis, ac propterea & e i, quæ equalis est ipsis a b, erunt rectæ e f, & e i, longitudine incommensurabiles, ut constat ex 14. propos. lib. huius. Sunt autem Rationales e f, e i, cum e f, sit dimidia ipsius e d, quæ Rationalis est & e i, Rationali a b, equalis. Quare rectæ e f, & i, Rationales sunt, & tantum potentia commensurabiles; Idcirco rectangulum e k, contentum sub duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus, Medium est, ut vult 22. propos. lib. huius, ac propterea & rectangulum m t, illi equali-

ELEMENTVM DECIMV M.

89

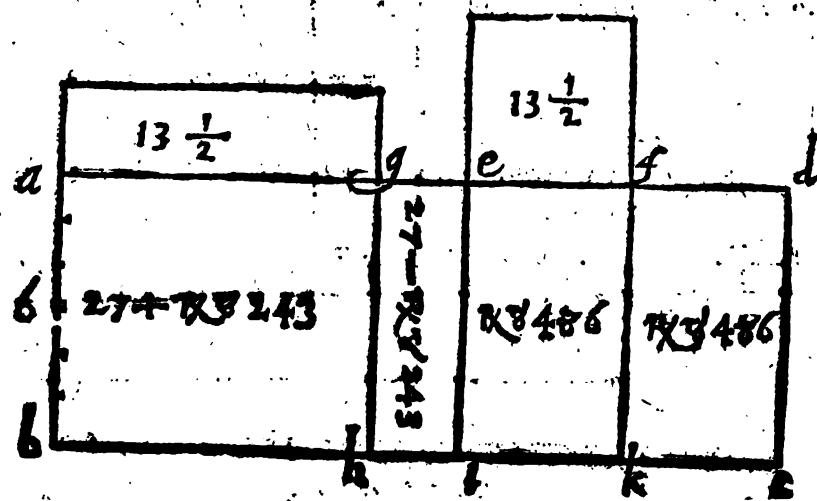


le, Medium, & contentum sub duabus Mediis a m, m p; Igitur cum o m, m p, Media sint, & solum potentia commensurabiles, quae Medium continent, erit tota a p. Irrationalis, que ex binis Mediis secunda dicuntur, de vult 39 proposib. buntur. Si spatium igitur continetur sub Rationali, &c. Quod erat ostendendum. Z

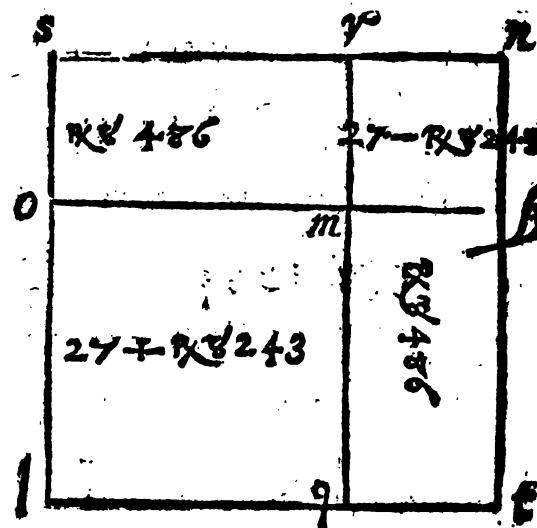
Theor. 40. Propos. 58.

S i spatum continetur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, Recta linea spatum poterit, Irrationalis est, quæ vocatur Major.

C O N T I N E A T V R spatum a c sub Rationali a b, & ex binis nominibus quarta a d, Dico rectam, quæ spatum a c, potest Irrationalem esse, quæ vocatur Major. Sit ipsis a d, maius nomen a e, minus vero e d, erunt igitur rectæ a e, e d, Rationales, & tantum potentia commensurabiles, & maius nomen a e, plus poterit, quam minus e d, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, & denique maius nomen a e, Rationali a b, expositæ longitudine erit commensurabile.



$$\begin{aligned} \text{area } ad, & 9 + 8x3/4 = 54 \\ bb + 8x3/4 &= bi + 8x3/4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & 8x3/4(27 - 8x3/4) + 8x3(27 + 8x3/4) \\ & \text{Tota superficies quadrati erit } 54 + 8x3/4 = 1944. \\ & \text{Compositum quadratum numerit } 34. \end{aligned}$$

S E C E T V R e d, bisariam in puncto f, & reliqua omnia fiunt ut in propos. 55. Erunt

igitur recte a g, g e, longitudine incommensurabiles, ut vult 19. propos. lib. huius. Similiter demonstrabimus ut ibi rectam o p, posse spatium a c, contentum sub Rationali a b, ex nominibus quarta a d. Dico rectam o p, esse Irrationalem, quae Maior appellatur. Cum enim a g, g e, longitudine sint incommensurabiles, erunt rectangula a h; g t, eandem habentia cum illis proportionem incommensurabilis, ut docet 10. propos. libri huius. Quadrata quoque l m, m n, illis equalia, incommensurabilia erunt. Quare recte o m, m p, potentia sunt incommensurabiles, ut constat ex 4. defin. lib. huius.

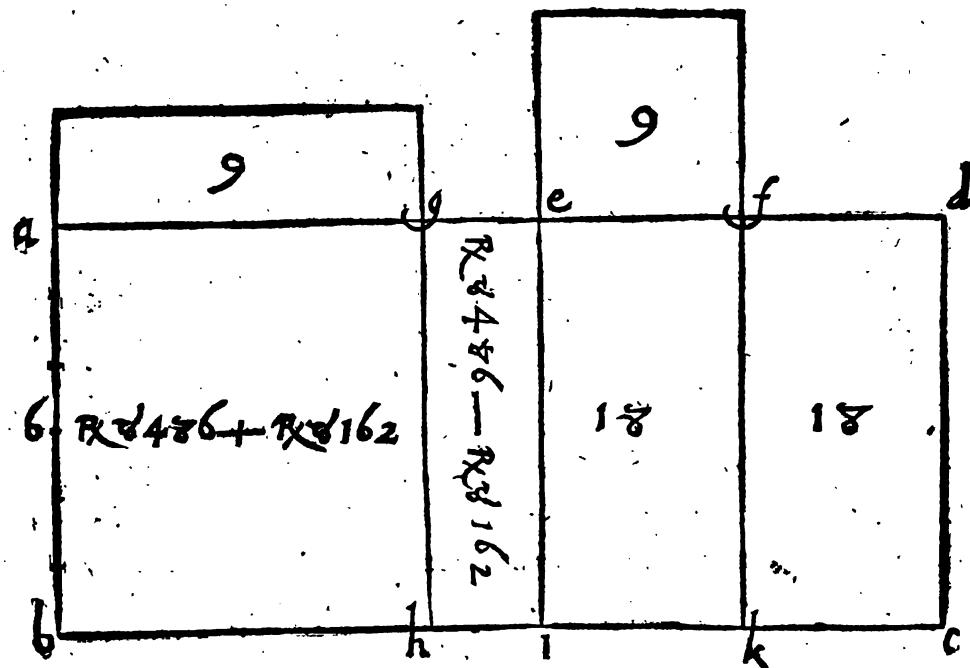
Quoniam verò recta a e, nimirum minus nomen rectæ a d, ex binis nominibus quartæ, Rationali ab, longitudine est commensurabilis; ut prædictum est, erit et a e, Rationalis, et rectangularum a i, contentum sub Rationalibus longitudinē commensurabilibus, Rationale erit, ut vult 20. propos. libri huius. Rectangulum verò a i, à quale est composite ex rectarum quadratis l m, m n, Quare compositum ex rectarum quadratis l m, m n, spatiū Rationale est.

Quoniam verò minus nomen e d, Rationali a b, exposita longitudine est incommensurabile, erit e f, eidem a b, longitudine incommensurabilis, cum sit dimidia ipsius e d. Est autem e f, Rationalis, cum Rationali e d, sit commensurabilis. Quare rectæ e f, a b, sunt tantum potentia commensurabiles, et rectangulum sub ipsis contentum, numerum e k, Medium erit, ut vult 22. propos. lib. huius, ac propterea et rectangulum m t, illi æquale, Medium. Igitur cum o m, m p, Media sint, et potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis, Rationale, Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium, tota o p, Irrationalis erit, quæ Maior dicatur, ut vult propos. 40. lib. huius. Si spatium igitur contingatur sub Rationali, et ex binis non minibus quartæ, et c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 41. Propof. 59.

Si spatiū continetur sub Rationali & ex binis nominibꝫ quinta, Recta linea spatiū potens; Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

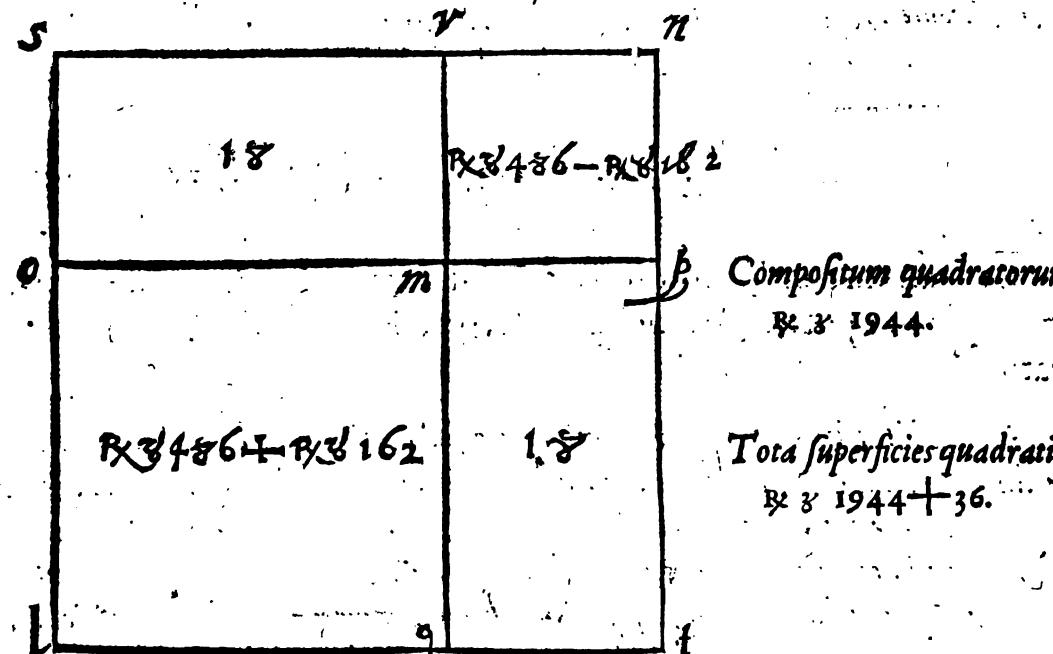
CONTINEATVR spatium a c, sub Rationali a b, ex his nominibus quinta a d. Dico rectam, que potest spatium a c, Irrationalem esse, qua Rationale, et Medium potens appellatur. Sic ipsis a d, maius nomen a e, rurunt igitur rectae a e, e d, Rationales, et tan-tum potentia commensurabiles, et maius nomen a e, plus poterit, quam minus e d, quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, et denique minus nomen e d, Rationali a b, exposita longitudine erit commensurabile, ut constat ex quinque definitione secundarum definitionum. Se-cetur minus nomen e d, bifatiam in f, et reliqua construantur, ut in propos. 55. erunt igitur a g, g e, longitudine incommensurabiles, ut vult 19. propos. lib. huius. Similiter demonstrabimus ut ibi, rectam o p, posse spatium a t, contendum sub Rationali a b, ex his nominibus quinque a d. Dico Irrationalem esse, qua Rationale, et Medium potens dicatur. Erunt enim deinde illa anteceden-teri propositione rectae o m, non p, incommensurabiles potentia, et quia a e, est Rationales, et Rationali a b, exposita longitudine incommensurabilis, erunt rectae a e, a b, Rationales, et sa-lam potentia inter se commensurabiles. Quare rectangulum sub ipsis conditionibus nominetur ac, et medium erit, ut vult 21. propos. lib. huius. Rectangulum vero a e, aquale est compositum ex rectan-gulum quadratis l m, m n. Igitur compositum ex rectarum quadratis l m, m n, et medium est.



$$\text{To: } a ad, \text{RX } 8^{\frac{54}{4}} + 6.$$

$$b h, \text{RX } 8^{\frac{14}{4}} + \text{RX } 8^{\frac{18}{4}}$$

$$b i, \text{RX } 8^{\frac{54}{4}} - \text{RX } 8^{\frac{18}{4}}$$



$$1 t, \text{RX } 8 (\text{RX } 8^{\frac{54}{4}} + \text{RX } 8^{\frac{18}{4}}) + \text{RX } 8 (\text{RX } 8^{\frac{54}{4}} - \text{RX } 8^{\frac{18}{4}})$$

R V R S V S quia recta e d, id est minus nomen ipsius a d, Rationali a b, longitudine est commensurabile erit et e f, cuius dimidia eidem a b, vel e i, que ipsi a b, aequalis est commensurabilis longitudine, et Rationalis. Quare rectangulum e k, concentrum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est, ut vnde 20. propositalibus huius, Atque idecirco et m t, illi aequale, Rationale. Contineatur autem rectangulum m t, sub rectis o m, m p; Igitur cum recte o m, m p, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum ex ipsis quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis concentrum, Rationale, Tora o p, Irrationalis est, que Rationalis.

E L E M E N T V M D E C I M V M,

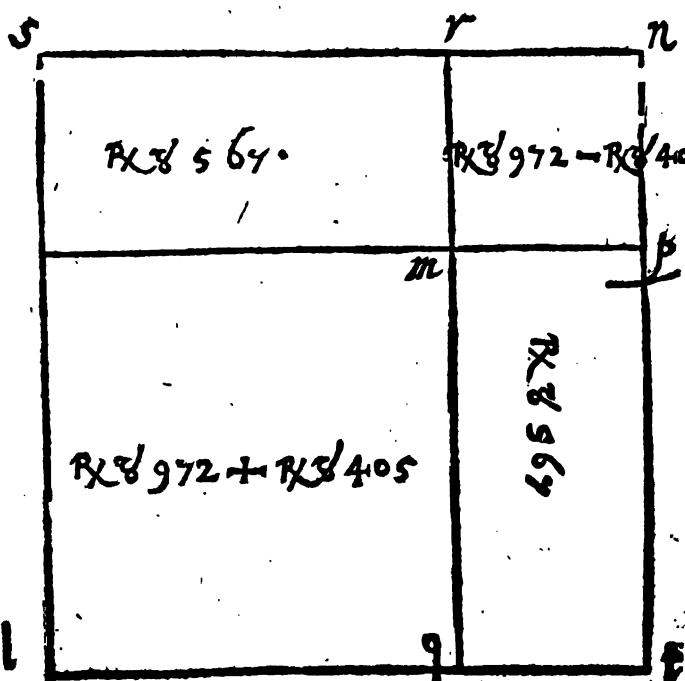
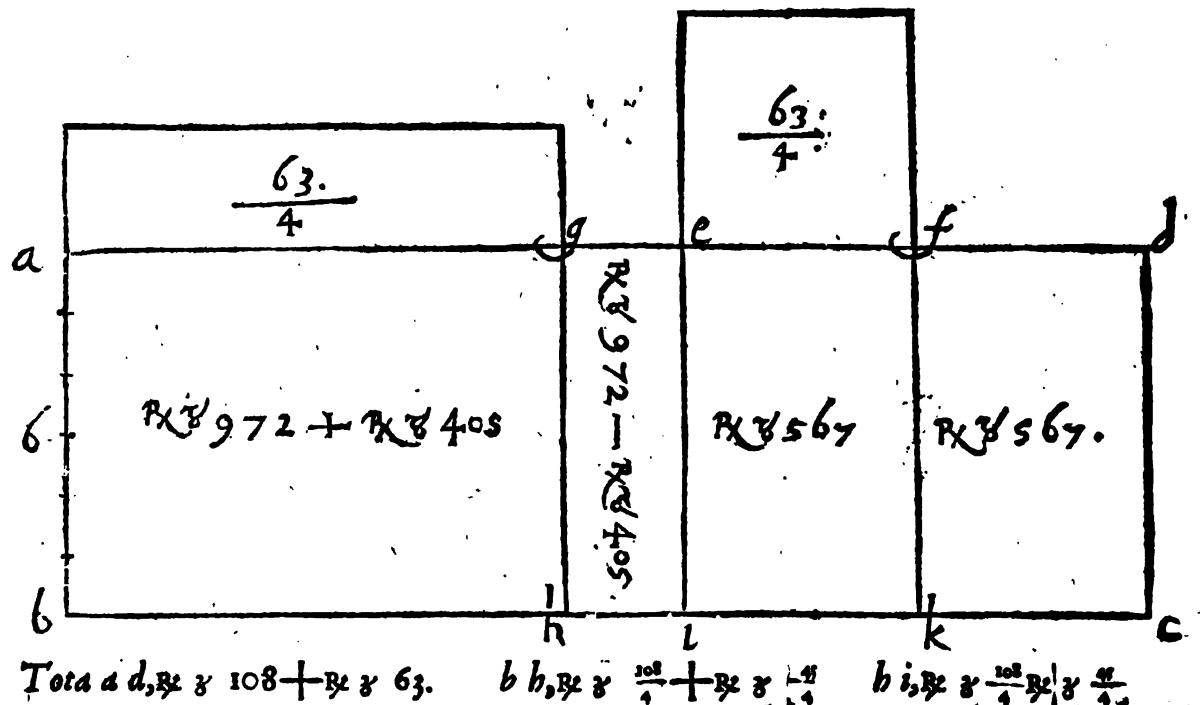
93

le, & Medium potens dicitur, ut vult 41. propos. lib. huic. Si spatum igitur contineatur sub Rationali & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 42. Propos. 60.

Si spatum contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sextas Recta linea spatum potens, Irrationalis est, quæ bina Media potens appellatur.

CONTINEATVR spatum a c, sub Rationali a b, & ex binis nominibus sexta



Compositum quadratorum RX 8 3888.
Tota superficies quadrati erit.
RX 8 3888 + RX 8 2268.

$$l, RX 8 (RX 8 972 + RX 8 405) + RX 8 (RX 8 972 - RX 8 405.)$$

a d, Dico rectam, qua spatum a c, potest Irrationalem esse, qua bina Media potens appellari.

Aa

tur. Sit ipsis a d, maius nomen a e, minus vero e d, erunt igitur a e, e d, Rationales, et tantum potentia commensurabiles, et maius nomen a e, plus poterit, quam minus e d, quadrato rectae sibi longitudine incomensurabilis, et denique neutrum ipsorum nominum a e, e d, Rationali a b, exposita longitudine erit commensurabile, ut vult sexta definitio secundarum definitionum.

Secetur e d, bifariam in f, et reliqua construancur, ut in antecedentibus, erunt igitur rectae a g, g e, longitudine incomensurabiles, ut vult 19. propos. lib. huius. Similiter ostendemus ut in propos. 55. rectam o p, posse spatium a c, contentum sub Rationali a b, et ex binis nominibus sexta a d; Item pari ratione, qua usi sumus propos. 58. rectae o m, m p, erunt incomensurabiles potentia: Deinde ut in antecedenti propositione erit compositum ex rectarum quadratis l m, m n, Medium, et ut in propos. 58. demonstrauimus, erit etiam rectangulum m t, Medium, comprehensum sub rectis o m, m p.

Quoniam vero duarum rectarum a e, e f, illa quidem longitudine incomensurabilis est ipsis e d, haec vero eidem longitudine commensurabilis, erunt rectae a e, e f, incomensurabiles longitudine, ut constat ex 13. propos. lib. huius. Igitur rectangula a i, e k, eandem cum illis proportionem habentia, sunt incomensurabilia, ut vult 10. propos. lib. huius. Quare compositum ex quadratis rectarum l m, m n, quod aequalis est rectangulo a i, et rectangulum m t, quod ipsis e k, est aequalis, incomensurabilia sunt. Continetur autem m t, sub o m, m p, Igitur cum rectae o m, m p, sint rectae potentia incomensurabiles facientes compositum ex ipsis contentum, Medium, rectangulum etiam sub ipsis contentum, Medium, incomensurabileque composite ex ipsis quadratis, tota o p, Irrationalis erit, quae bina Media potens appellatur, ut vult propos. 42. lib. huius. Si spatium igitur continetur, et c. Quod erat demonstrandum.

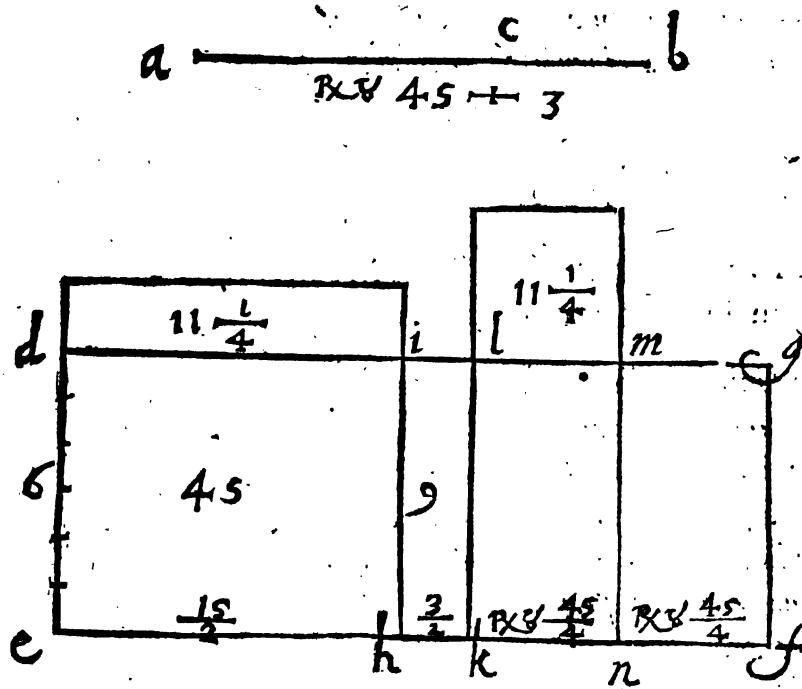
Theor. 43. Propos. 61.

QVADRATVM eius, quae est ex binis nominibus ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT recta a b, ex binis nominibus nimirum vel prima, vel secunda, vel tertia, et c. et ad Rationalem d e, applicetur rectangulum d f, aequalis quadrato ex a b, latitudinem faciens d g. Dico rectam d g, esse ex binis nominibus primam.

Applicetur ad eandem d e, rectangulum d h, quadrato ex a c, descripto aequali, et ad h i, que Rationali d e, est aequalis aliud rectangulum applicetur aequali quadrato c b, nimirum rectangulum i k, erit igitur rectangulum l f, aequali rectangulo bus sub a c, c b, comprehenso, cum quadratis ex a c, c b, una cum rectangulo ex a c, c b, bis contento aequalia sint quadrato ex a b, ut vult 4. propos. lib. 2. Quemadmodum et eidem quadrato ex constructione aequali est etiam rectangulum d f. Secetur l g, bifariam in puncto m, per quod rectis l k, g f, ducatur parallela m n, erit igitur utrumque rectangulum l n, m f, aequali rectangulo sub a c, c b, contento.

Quoniam vero a c, c b, sunt Rationales, et potentia inter se tantum commensurabiles ex hypothesi, erunt earum quadrata, Rationalia, et commensurabilia. Et quia compositum ex ipsis quadratis a c, c b, quadratis ex a c, c b, descriptis commensurabile est, ut vult 16. propos. lib. huius, erit et compositum illud, Rationale. Rectangulum vero d k, ex constructione aequali est composite ex quadratis rectarum a c, c b, Igitur d k, Rationale erit. Quare cum rectangulum illud Rationale ad Rationalem d e, sit applicatum, latitudinem d l, faciet Rationalem, et ei Rationale d e, longitudine commensurabilem, ut vult 21. propos. libri huius.

Tota d g, 9 + $\cancel{R}E$ 3 45.d f, 54 + $\cancel{R}E$ 3 1620.

R V R S V S cùm a c, c b, Rationales sunt potentia tantùm inter se commensurabiles, erit rectangulum sub ipsis contentum, Medium, ut vult 22. propos. lib. huius, atque adeò & quod bis sub ipsis, cùm ei sit commensurabile, hoc est, rectangulum l f, ut constat ex coroll. Clauij propos. 24. lib. huius. Quare rectangulum illud l f, (quod Medium est) ad Rationalem applicatum latitudinem faciet l g, Rationalem, eique Rationali l k, longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propos. lib. huius.

Est autem recta d l, ostensa eidem d e, longitudine commensurabilis, quare recta d l, l g, longitudine incommensurabiles sunt. Igitur d l, l g, Rationales sunt & tantùm inter se potentia commensurabiles, ac propterea recta d g, ex binis nominibus est, ut vult 37. propos. lib. huius. Dico & primam esse.

Quoniam enim ex lemmate Clauij propos. 54. lib. huius rectangulum sub a c, c b, medium est proportionale inter quadrata ex a c, c b, erit quoque rectangulum l n, vel m f, medium proportionale inter rectangula d h, i k. Atque adeo cùm recta d i, l m, i l, eandem habeant proportionem, quam rectangula d h, l n, i k, ut constat ex 1. propos. lib. 8. erit recta l m, media proportionalis inter d i, & i l. Igitur per 17. propos. lib. 6. quadratum ex l m, aequale est rectangulo sub d i, i l, comprehenso.

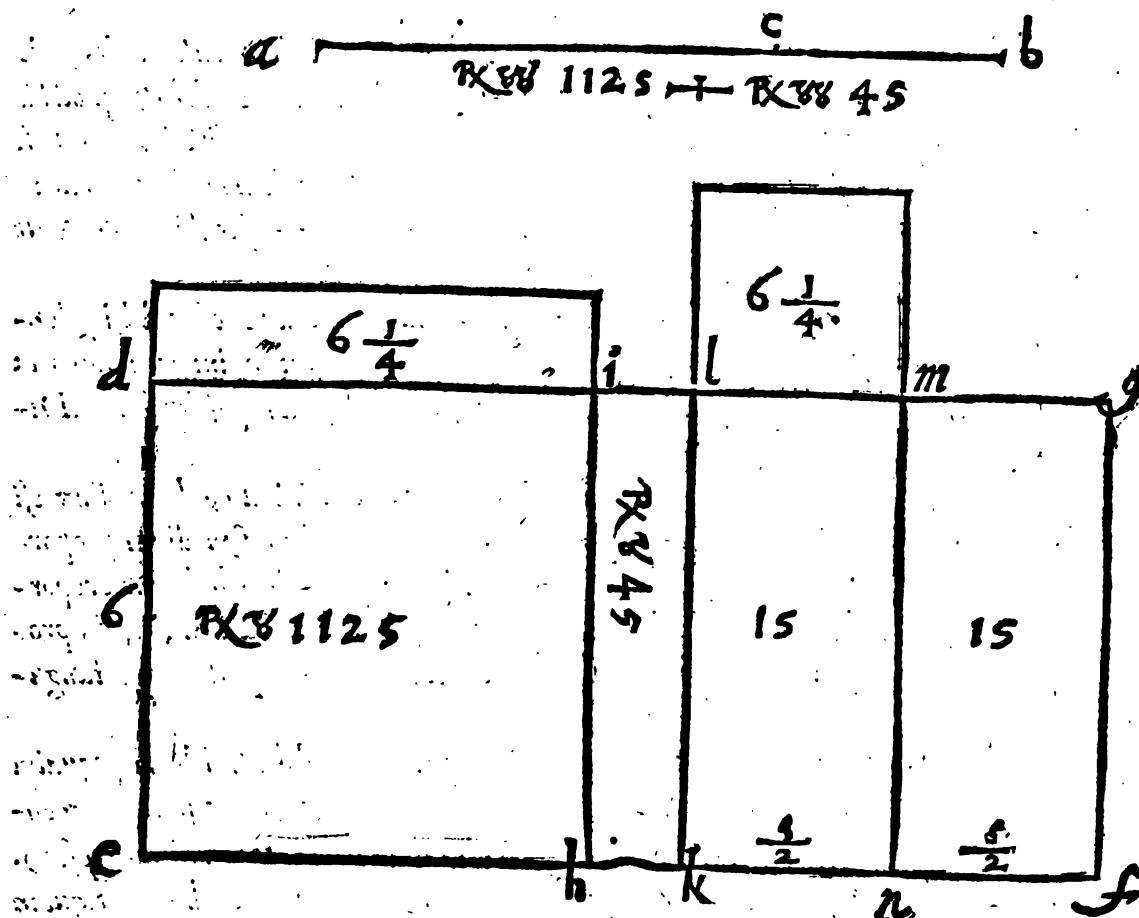
Quoniam vero quadrata ex a c, c b, sunt commensurabilia, erunt & d h, & i k, illis aequalia commensurabilia. Quare recta d i, i l, eandem cum illis proportionem habentes sunt commensurabiles. Quia vero rectangulum d k, rectangulo l f, maius est ex lemmate Clauij propos. 19. lib. huius, erit & recta d l, maior, quam l g, cùm recta d l, l g, eandem rationem habeant, quam rectangula d k, l f, ex 1. propos. lib. 6. Igitur cùm d l, maior sit, quam l g, & ad maiorem d l, applicetur rectangulum sub d i, i b, aequale quartae parti quadrati ex minore l g, descripti, deficiensque figura quadrata, sitque d l, diuisa in partes longitudine commensurabiles ut ostensum fuit, poterit maior d l, plus, quam minor l g, quadrato recta sibi commensurabilis longitudine, ut constat ex 18. propos. lib. huius. Quare cùm d g, sit ostensa ex binis nominibus, & maius no-

men ipsius d g, nempe d l, plus posset, quam minus quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, et denique maius nomen d l, Rationali d e, longitudine sit commensurabile, erit recta d g, ex definitione prima secundarum definitionum ex binis nominibus prima. Quadratum ergo, et c. Quod erat ostendendum.

Theor. 44. Propos. 62.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

SIT a b, ex binis Mediis prima cuius maius nomen sit a c, et ad Rationalem d e, applicetur rectangulum d f, quadrato ex a b, æquale faciens latitudinem d g, Dico rectam d g, esse ex binis nominibus secundam. Construantur eadem, quæ in propos. precedenti, ita ut rectangula d h, i k, sint æqualia quadratis ex a c, c b, descriptis, et rectangula l n, m f, æqualia sint quoque rectangulis sub a c, c b, comprehensis. Igitur cum rectæ a c, c b, quæ ex binis Mediis primis componuntur, sint ex 38. propos. lib. huius Media potentia tantum commensurabiles Rationales continentur, erunt quadrata ex a c, c b, Media, et inter se commensurabilia. Atque adeò et rectangula d h, et i k, illis æqualia, Media, et inter se commensurabilia. Quare cum com-



$$d g. \text{Rx } 3. 45 + 5.$$

$$\text{cosa. superficies d f, est Rx } 1620 + 30.$$

positum ex rectarum quadratis a c, c b, tam quadrato ex a c, quam quadrato ex c b, sit commensurabile, ut colligitur ex 16. propos. lib. huius, erit ex corollario Claviij propos. 24. lib. huius,

com-

compositum illud, Medium, ac properea & rectangulum d k, huic composto aequale, Medium.

Medium autem ad Rationalem applicatum latitudinem facit Rationalem, & ei Rationali ad quam applicatum est longitudine incommensurabilem, ut constat ex 23. propos. libri huius. Quare recta d l, recta d e, longitudine est incommensurabilis.

Rursus quoniam rectangulum sub a c, c b, Rationale est, eiusque duplum nimis rectangulum l f, sitque l f, applicatum ad Rationalem d e, vel l k illi aequalem, latitudinem efficiet l g, Rationalem, & ei ad quam applicatum est longitudine commensurabilem, ut constat ex 21. propos. lib. huius.

Igitur cum duarum rectarum d l, l g, illa sit Rationali d e, longitudine incommensurabilis, haec verò commensurabilis longitudine, erunt rectae d l, l g, longitudine inter se incommensurabiles, ut constat ex 13. propos. lib. huius. Rationales tamen ostensa sunt d l, l g, Igitur Rationales, & potentia tantum commensurabiles sunt d l, l g, Ac propterea tota d g, ex binis nominibus, ut vult 37. propos. lib. huius. Dico & secundam esse.

Nam cum, ut in antecedenti propositione demonstrauimus, maius nomen sit d l, & plus posse, quam minus l g, quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine, minus verò l g, Rationali expositae sit commensurable longitudine, erit d g, ex definitione secunda secundarum definitiōnum ex binis nominibus secunda. Quadratum igitur ad Rationalem, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 45. Propos. 63.

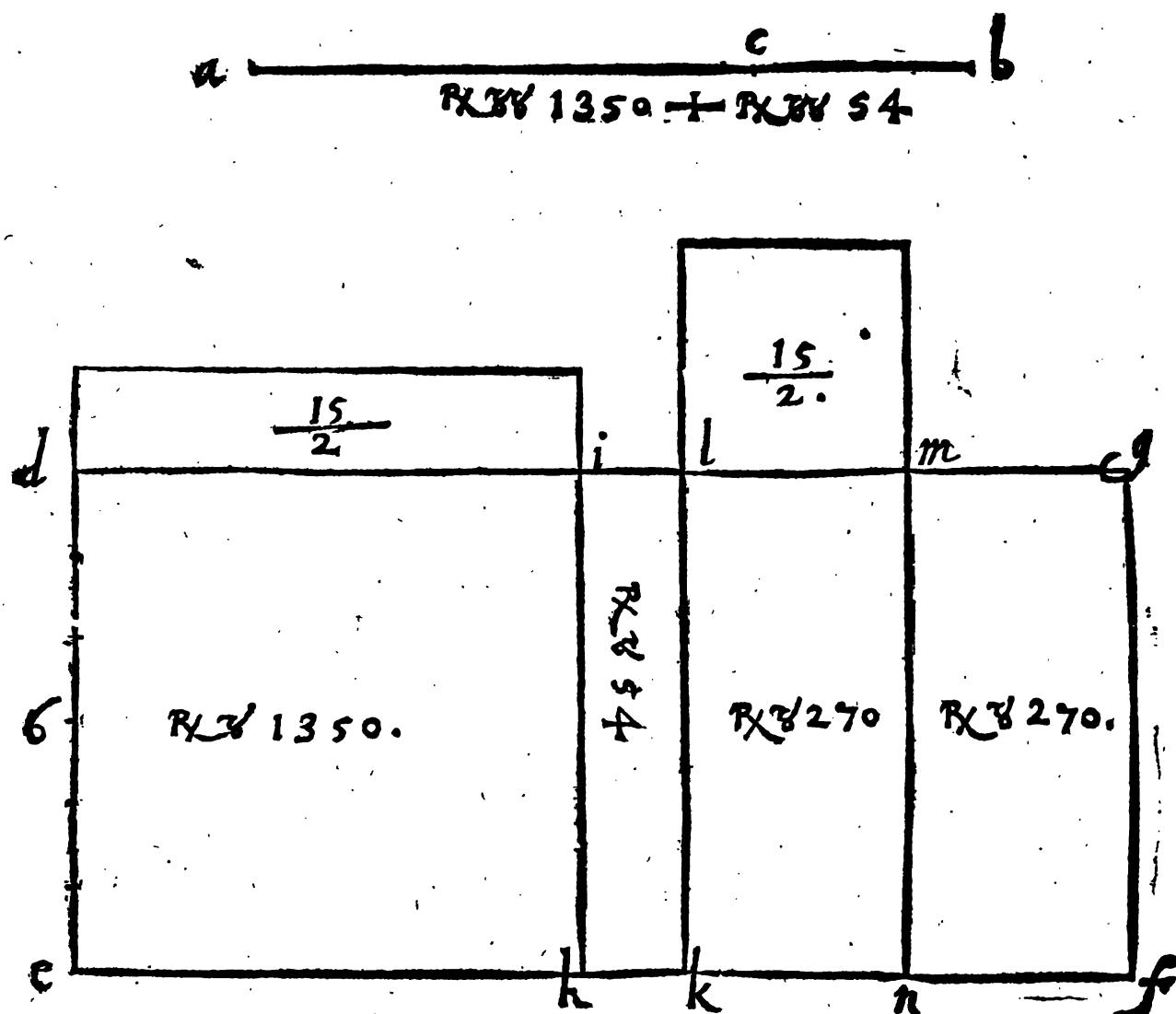
QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT recta a b; ex binis Medii secunda, cuius maius nomen sit a c, & ad Rationalem d e, applicetur rectangulum d f, aequalē quadrato ex a b, faciens latitudinem d g, Dico rectam d g, esse ex binis nominibus tertiam. Iisdem enim constructis, que in 61. propositione: Cum a c, c b, que rectam a b, componunt, Media sint, potentia tantum commensurabiles, Medium continentes; erunt quadrata ex a c, c b, Media, & inter se commensurabilia, Compositum etiam quadratorum ex a c, c b, Medium, cum verique quadrato ex a c, c b, commensurabile sit, ac propterea & rectangulum d k, huic composta aequale, Medium erit, Rectangula igitur d h, i k, que aequalia sunt quadratis ex a c, c b, Media erant, & inter se commensurabilia.

Medium autem ad Rationalem applicatum latitudinem facit Rationalem, & ei ad quam applicarum est longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propos. lib. huius: Quare latitudo d l, Rationalis est, & Rationali d e, expositae longitudine incommensurabilis.

Rursus cum rectangulum sub a c, c b, ex hypothesi Medium sit, erit & eius duplum l f, Medium: cum igitur Medium l f, ad Rationalem sit applicatum, latitudinem faciet l g, Rationalem, sed Rationali d e, longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propos. lib. huius. Quoniam vero a c, c b, longitudine sunt incommensurabiles ex hypothesi, sitque ut a c, ad c b, ita ex lemmare sexto Clavi propositionis 19. lib. huius, quadratum maioris ad rectangulum sub a c, c b, contenus, Erit quoque quadratum ex a c, rectangulo sub a c, c b, contento incommensurabile ex 20. propos. lib. huius. Quadratum autem ex a c, descripto commensurabile est compositum ex rectarum quadratis a c, c b, ut iam antea fuisse ostensum: Rectangulo vero sub a c, c b, com-

Bb



$d.g. \frac{1}{2} \times 54 + \frac{1}{2} \times 30.$ Tota superficies d f, erit $\frac{1}{2} \times 1944 + \frac{1}{2} \times 1080.$

prehensio commensurabile est, quod bis sub a c, c b, continetur. Quare compositum est rectarum quadratis a c, c b, nimis rectangulum d k, illi aequale, incommensurabile est rectangulo bis sub a c, c b, comprehenso, nimis rectangulo l f, ut manifestum est ex iis, quae Clavius tradidit in scholio propositionis 14. libri huic. Igitur recta d l, l g, eandem rationem inter se habentes, quam d k, l f, longitudine sunt inter se incommensurabiles, ut vult 1. sexti: Rationales tamen ostense sunt recta d l, l g, Igitur Rationales sunt d l, l g, et tantum potentia commensurabiles, recta quoque d g, ex illis duabus composita Irrationalis qua ex binis nominibus dicitur, ut vult 37. proposicio huic libri.

Iam vero demonstrabimus, ut in propositione 61. rectam d l, esse maius nomen, et plus posse, quam minus quadrato recte sibi longitudine commensurabilis: Quare cum maius nomen d l, plus possit, quam minus l g, quadrato recte sibi longitudine commensurabilis, et neutrum ipsorum nominum Rationali d e, longitudine sit commensurabile, erit recta d g, ex illis duabus d l, l g, composita, ex binis nominibus certa, ut vult certa definitionis secundarum definitionum lib. huic. Quadratum ergo, et c. Quod erat ostendendum.

Theor. 46. Propos. 64.

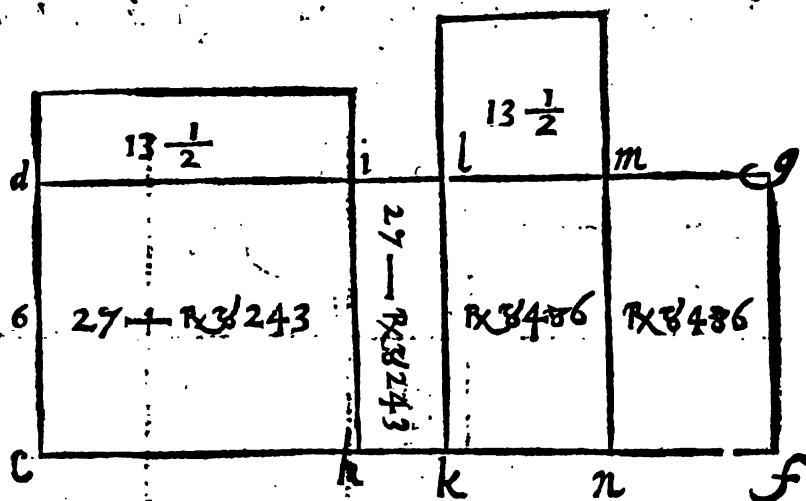
Quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem faciet ex binis nominibus quartam.

SIT recta $a b$, Maior, cuius minus nomen sit $a c$, & ad Rationalem $d e$, applicetur rectangulum $d f$, aequale quadrato ex $a c$, faciens latitudinem $d g$: Dico rectam $d g$, esse ex binis nominibus quartam, Constructis enim iisdem, que supra in propositione 61. Cum $a c, c b$, rectae sint potentia inter se incommensurabiles, quæ Maiorem $a b$, componunt, facientque compositum ex ipsis quadratis Rationale, at rectangulum sub ipsis contentum Medium, ut vult 40. propos. lib. huius, erit quoque rectangulum $d k$, composite ex rectarum quadratis $a c, c b$, aequale, Rationale, sed rectangulum $l f$, quod aequale est rectangulo bis sub $a c, c b$, Medium erit.

Rationale autem $d k$, ad Rationalem $d e$, applicatum latitudinem facit $d l$, Rationalem, & Rationali $d e$, expositæ longitudine commensurabilem, ut vult 20. propos. lib. huius.

Cum autem rectangulum $l f$, quod est Medium ad Rationalem $l k$, si applicatum, faciet $l g$, Rationalem & ei $l k$, longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propos. lib. huius.

$$\frac{a}{\sqrt{3}(27 + \sqrt{3}243)} \quad \frac{c}{\sqrt{3}(27 - \sqrt{3}243)} \quad b$$



Recta $d g, 9 + \sqrt{3}54$.

Tota superficies quadrati ex $a b$, erit $54 + \sqrt{3}1944$.

Lineæ $e h, h k$, sunt notatae propos. 58.

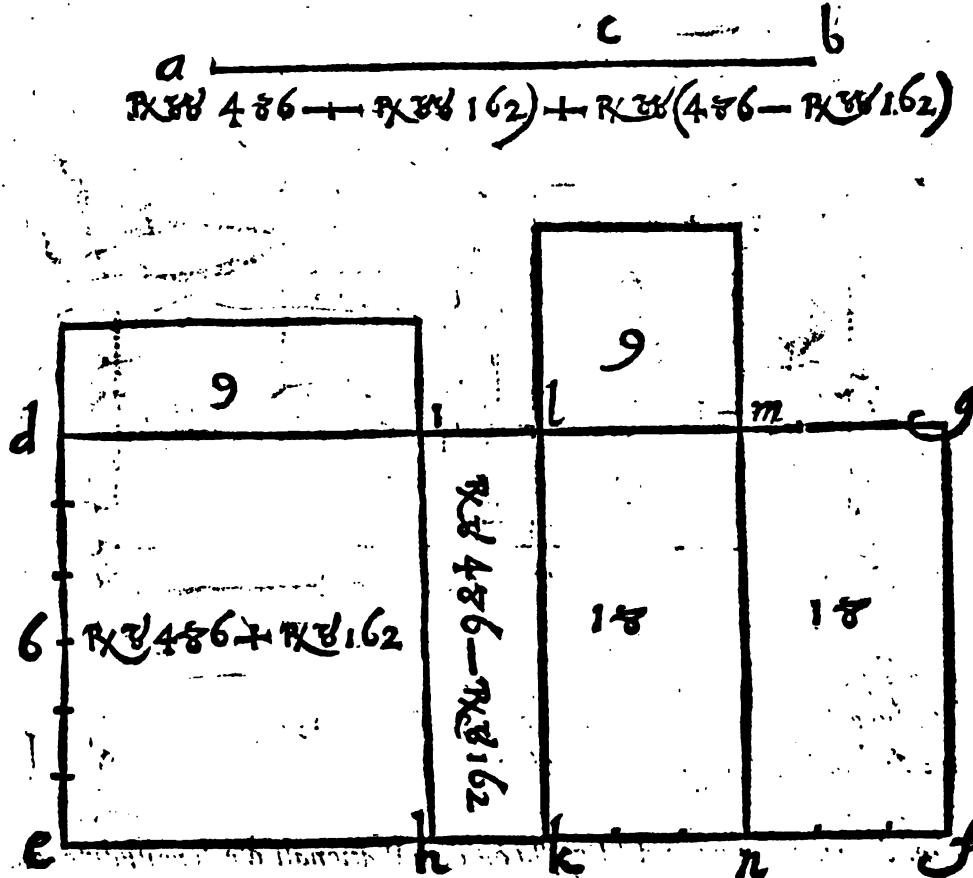
Quare cum duarum rectarum $d l, l g$, illa quidem Rationali $d e$, longitudine commensurabilis existat, haec vero minimè sit eidem commensurabilis longitudine, erunt $d l, l g$, longitudine incommensurabiles, ut vult 13. proposicio lib. huius. Rationales tamen ostensa sunt $d l, l g$, Rationales sunt igitur rectæ $d l, l g$, & tantum potentia commensurabiles, ac propterea tota $d g$, ex illis duabus compositione, Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, ut constas ex 37. propos. lib. huius lib.

Iam verò demonstrabitur ut in propos. 61. lib. huius rectangulum sub d i, & i l, aequalē esse quartā partī quadrati ex minori l g, descripti, & quia quadrata ex a c, c b, sunt incommensurabilia, cùm rectæ a c, c b, sint ex hypothesi potentia incommensurabiles, erunt & rectangula d. b, i. k, illis aequalia, incommensurabilia. Atque adeo & rectæ d i, i l, eandem rationem habentes cum illis longitudine erunt incommensurabiles. Quoniam verò ut in propos. 61. lib. huius ostensum est rectam d l, maiorem esse, quam l g. Et ad maiorem d l, applicatum est rectangulum sub d i, i l, contentum, aequalē quartā partī quadrati ex minore l g, descripti deficiens figura quadrata, sique recta d l, divisa in puncto i, in partes longitudine incommensurabiles, poterit maior d l, plus, quam minor l g, quadrato recta fibi incommensurabilis longitudine, ut constat ex 19. propos. lib. huius. Quocirca cùm d l, (nimur maius nomen ex binis nominibus) ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali d e, exposita, erit d g, ex binis nominibus quarta, ut colligitur ex quarta definitione secundarum definitionum lib. huius. Quadratum igitur ad Rationalem, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 47. Propos. 65.

Quadratum eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta a b, potens Rationale, ac Medium, cuius maius nomen sit a c, & ad Rationalem



Recta d g, scilicet 54 + 6. Tota superficies quadrati ex a b, erit scilicet 1944 + 96.
Lineæ e b, b k, notata sunt propos. 59. lib. huius.

d e, applicetur rectangulum d f, aequalē quadrato ex a b, faciens latitudinem d g. Dico d g, esse ex

ex binis nominibus quintam. Construantur reliqua ut in propos. 61. Igitur cum recta a.c,c b, que rotam a b, componunt, sint rectae potentia incommensurabiles inter se facientes compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale, ut vult 41. propos. lib. huius, erit et rectangulum d k, huic composite aequalis, Medium, et l f, aequalis quod bis sub a c, c b, continetur, Rationale.

Medium autem d k, ad Rationalem d e, applicatum latitudinem facit d l, Rationalem, et ei longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propos. lib. huius. Igitur recta d l, Rationalis erit, et Rationale d e, incommensurabilis longitudine.

Cum autem rectangulum l f, quod Rationale est ad eandem Rationalem d e, vel l k, que illi est aequalis, sit applicatum, faciet latitudinem l g, Rationalem, et ipsi l k, longitudine commensurabilem, ut constat ex 20. propos. lib. huius.

Quoniam vero duarum rectarum d l, l g, illa quidem Rationali d e, exposita longitudine est incommensurabilis, haec vero eidem sit commensurabilis longitudine, erunt ex 13. propos. lib. huius recta d l, l g, longitudine incommensurabiles: Rationales tamen ostensa sunt d l, l g, Igitur Rationales sunt, et tantum potentia commensurabiles, ac propria tota d g, ex illis duabus composite Irrationalis, que ex binis nominibus dicitur, ut vult 37. propos. lib. huius. Nam vero ut in propos. 61. ostendamus rectangulum sub d i, i l, aequalis esse quartae parti quadrati ex minore l g, descripti nimirum quadrato ex l m, Rectam quoque d l, maiorem esse recta l g, et plus posse quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis. Igitur cum minus nomen l g, Rationali d e, exposita sit ostensum commensurabile longitudine, erit ex quinta definitione definitionum secundarum lib. huius, recta d g, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius que Rationale, et Medium potest, et c. Quod erat ostendendum.

Theor. 48. Propos. 66.

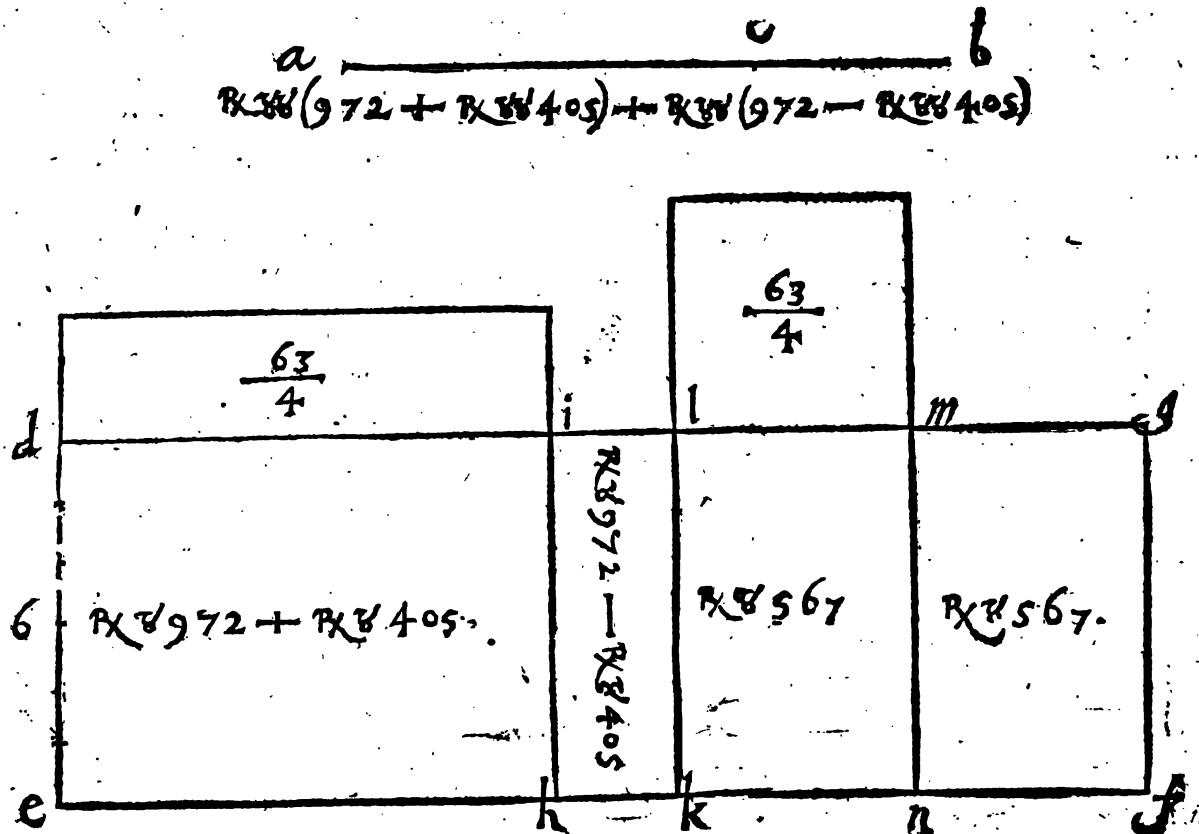
QVADRATVM eius, quæ bina media potest ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

SIT recta a b, bina Media potens, cuius maius nomen sit a c, et ad Rationalem d e, applicetur rectangulum d f, aequalis quadrato ex a b, descripto faciens latitudinem d g, Dico rectam d g, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus sexta dicitur. Construantur reliqua omnia, ut in propos. 61. Igitur cum recta a c, c b, qua binam Medium potenter componunt, nimirum a b, sint rectae potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum vero sub ipsis contentum Medium, et incommensurabile composite ex ipsarum quadratis, ut vult 42. propos. lib. huius, erunt rectangula d k, et l f, Media (est enim d k, composite ex rectangularium quadratis a c, c b, aequalis, et l f, rectangularibus sub a c, c b, contento aequalis).

Media autem illa ad Rationales d e, et l k, applicata latitudines faciunt d l, l g, Rationales, sed Rationalibus d e, et l k, longitudine incommensurabiles, ut vult 23. propos. lib. huius.

Quoniam vero rectangulum sub a c, c b, contentum incommensurabile est, composite ex rectangularium quadratis a c, c b, eidem vero rectangulo commensurabile est, quod bis sub a c, c b, continetur, erunt rectangula d k, et l f, inter se incommensurabilia, ut colligitur ex 13. propos. lib. huius, Ac propria et recta d l, l g, eandem cum illis proportionem habentes incommensurabiles, erunt longitudine, ut vult 10. propos. libri huius, Rationales tamen ostensa sunt d l, l g, Rationales.

nales igitur, & tantum potentia inter se commensurabiles, Ac propterea recta d g, ex illis duas bus composita Irrationalis, que ex binis nominibus dicitur, ut constat ex 37. propos. libri huius.



Recta d g, RXV 108 + RXV 63.

Tota superficies quadrati ex a b, erit RXV 3888 + RXV 2268.

Lineas e b, h k, reperies propos. 60. lib. huius.

Iam vero ut in antecedentii propositione demonstrabitur d l, esse maius nomen, & plus posse, quam minya quadrato recta sibi incomensurabilis longitudine; Cum autem neutrum ipsorum nominum d l, l g, Rationali d e, exposita longitudine sit commensurabile, erit d g, ex binis nominibus sexta, ut vult sexta definitorum secundarum definitionum lib. huius. Quadratum igitur eius, que linea Almedia potest, &c. Quod erat ostendendum.

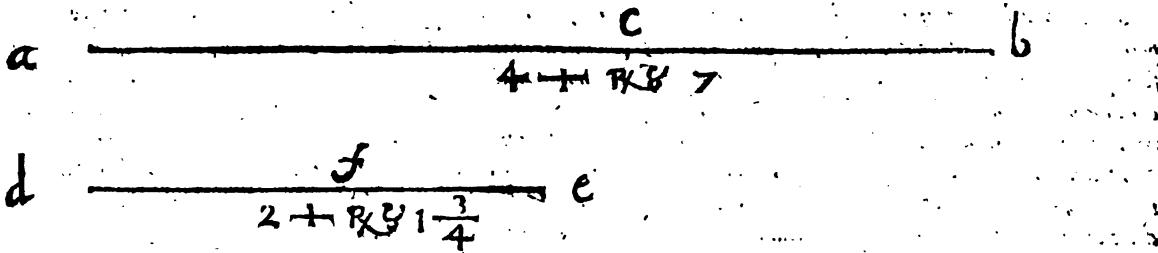
Theor. 49. Propos. 67.

Ei, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus a b, vel prima, vel secunda, vel tertia, &c. quæ diuisa sit in sua nomina in e, quorum maius sit a c, & c b, minius sitque recta d e, ipsi a b, commensurabilis longitudine. Dico rectam d e, esse quoque ex binis nominibus & ordine eandem ipsi a b.

Fiat deinde, ut res a b, ad etiam d e, ita ablata a c, ad ablata d f, id est quarta proportionalis inveniatur, ut vult 12. propos. lib. 6. erit igitur reliqua c b, ad reliquam f e, ut res a b, ad etiam d e, ut constat ex 19. propos. lib. 5.

Quoniam vero a, b, d, e , longitudo sunt commensurabiles erunt $d, f, \text{et } a, c, \text{ et } f, e, c, b$, commensurabiles longitudine, ut vult 10. propos. lib. 5.



Sunt autem a, c, c, b , (duo nomina scilicet linea ex binis nominibus) Rationales, Igitur et d, f, f, e , Rationales erunt.

Rursus quia est, ut $a, c, ad d, f, ita c, b, ad f, e$, et permutando, ut $a, c, ad c, b, ita d, f, ad f, e$, sunt autem a, c, c, b , potentia tantum commensurabiles, erunt et d, f, f, e , potentia etiam solum commensurabiles, ut constat ex 10. propos. lib. 5. Quare d, f, f, e , Rationales sunt, et tantum potentia commensurabiles, ac proinde tota d, e , composita ex illis duabus, Irrationalis, que ex binis nominibus dicitur, ut vult 37. propos. lib. huius. Dico ordine eandem esse ipsi a, b , id est, si a, b , sit ex binis nominibus prima, erit et d, e , ex binis nominibus prima, si sit ex binis nominibus secunda, erit et d, e , ex binis nominibus secunda, et c. Nam vero aut a, c , plus potest, quam c, b , quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si autem a, c , plus potest, quam c, b , quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, poterit et d, f , plus, quam f, e , quadrato recta etiam sibi commensurabilis longitudine. Si vero a, c , plus potest, quam c, b , quadrato recta sibi incommensurabilis longitudine poteris d, f , plus, quam f, e , quadrato recta etiam sibi incommensurabilis longitudine, ut constat ex 15. propos. lib. huius.

Et si a, c , Rationali exposita sit longitudine commensurabilis, ita ut a, b , sit ex binis nominibus prima, erit et d, f , eidem Rationali longitudine commensurabilis, cum veraque, et Rationalis, et d, f , eidem a, c , sit longitudine commensurabilis; Quare ex definitione prima secundarum definitionum lib. huius erit d, e , ex binis nominibus prima.

Si vero minus nomen c, b , Rationali exposita longitudine sit commensurabile, erit et f, e , eidem Rationali commensurabilis. Igitur cum a, b , ex binis nominibus sit secunda, erit et d, e , ex binis nominibus secunda.

Si denique neutrum ipsorum nominum Rationali exposita longitudine sit commensurabile, ita ut a, b , sit ex binis nominibus tertia, erunt et recta d, f, f, e , eidem Rationali longitudine incommensurabiles. Quare et d, e , erit ex binis nominibus tertia, ut vult tertia definitio secundarum definitionum lib. huius.

Quod si a plus proficit, quam c, b , quadrato sibi longitudine incommensurabilis, poteris et d, f , plus, quam f, e , quadrato recta etiam sibi incommensurabilis longitudine, ut vult 15. propos. lib. huius. Quare ut prius, concludamus et d, e , esse ex binis nominibus quadrato quinquevel sextum, prius recta a, b , fuerit secunda nominibus vel quarta, vel quinta, ut sequitur.

Es agitur, quare deinceps nominibus et c. Quod rite ostendendum.

QVOD si recta d, e , potentia tantum commensurabilis sit ipsi a, b , que est ex binis nominibus ostendimus quidem, eodem modo, (si lato commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus ubique: commensurabilis potentia tantum;) et d, e , esse etiam incommensurabile, ut recta eiusdem longitudinis sit incommensurabilis est, nolle inveni apud nos rationem sequitur, sed a, c , maius nomen longitudine sit commensurabile exposita Rationali; et d, f , maius nomen eidem esse commensurabile longi-

rudice; propterea quod non veraque, nempe exposita Ratione, & d f, sidem a c, longitudine commensurabilis est, sed Ratione quidem commensurabilis longitudine: At vero d f, potentia tantum, ex hypothesi. Ininde vero si a b, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, ut d e, illa potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

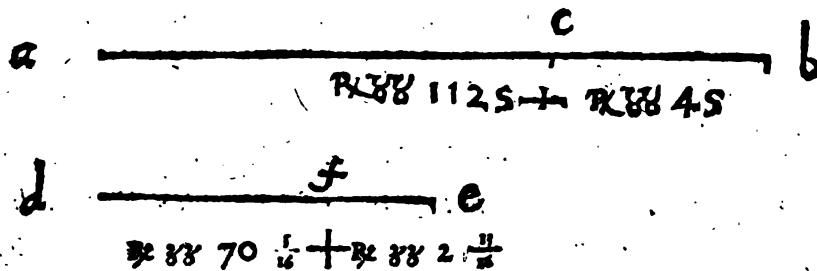
Sit enim a b, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, divisa in sua nomina ad c, sique ei commensurabilis potentia tandem d e quamquidem, ut in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, duarumque esse in sua nomina ad f, & partes a c, c b, partibus d f, f e, proportionales esse, nominum illas, ad binis tandem habere rationem, quam tota a b, ad totam d e. Dico nullo modo fieri posse, ut d e, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi a b, Nam si potest fieri, sit veraque ex binis nominibus prima. Erit ergo utrumque minus nomen a c, d f, ex defini. Rationis exposita commensurabile longitudine. Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est ut a c, ad d f, ita a b, ad d e, erunt propterea & a b, d e, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim d c, ipsi a b, potentia solum commensurabilis. Non ergo veraque a b, d c, ex binis nominibus prima est. Eodem modo neque veraque ex binis nominibus quarta est. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim verumque minus nomen c b, f e, ex definitione longitudine commensurabile Rationis exposita, atque adeo & inter se. Igitur & tota a b, d e, longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur. Semper tamen verum est, si a b, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam d e, ipsi a b, potentia solum commensurabile, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit a c, plus, quam c b, quadrato recte sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit, ut a c, ad c b, ita d f, ad f e, poterit quoque d f, plus quam f e, quadrato recte sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defini. erit d e, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si a b, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut a c, plus possit, quam c b, quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis; poterit quoque d f, plus, quam f e, quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis, cum sit ut a c, ad c b, ita d f, ad f e. Igitur ex defini. erit d e, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi a b.

In sequentibus autem quatuor propositionibus necessarii erit d e, eadem ordine ipsi a b, esse quamquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

Theor. 50. Propos. 68.

Ei, quae est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.

SIT recta a b, ex binis Mediis prima diuisa in sua nomina, sique minus nomen a c, minus vero c b, sit recta d e, ei longitudine commensurabilis. Dico d e, esse quoque ex binis Mediis primam. Deinde fiat, ut tota a b, ad totam d e, sic ablata a c, ad ablata d f, ut vult 12. propos. lib. 6. erunt igitur reliqua c b, f e, inter se ut tota a b, d e, ex 19. propos. lib. 5.



Quoniam vero a b, d e, ponuntur longitudine inter se commensurabiles, erunt a c, d f, & c b, f e, etiam commensurabiles longitudine, ut vult 10. propos. lib. 5. Sunt autem a c, c b, Mediae, Igitur & d f, f e, que illis commensurantur, Mediae sunt, ut vult 24. propos. lib. huius.

Rursus cum sit ut a c, ad d f, ita c b, ad f e, & permueando, ut a c, ad c b, ita d f, ad f e, sunt autem a c, c b, potentia solum commensurabiles, erunt & d f, f e, tantum commensurabiles potentia, ut vult 10. propos. libr. huius. Cum igitur Mediae sint demonstratae a c, c b, erunt d f, f e, Mediae, & tantum potentia commensurabiles, Ac proinde recta d e, erit ex binis Mediis, ut vult 39. propos. lib. huius. Dico ordine eandem esse ipsi a b.

Quoniam enim est, ut a c, ad c b, ita d f, ad f e, Est autem ut a c, ad c b, ita quadratum ex a c,

$a c$, ad rectangulum sub $a c, c b$, ut $d f$, ad $f e$, ita quadratum ex $d f$, ad rectangulum sub $d f, f e$, contentum, ut demonstrauit Clavius lemmate 3. propos. 19. lib. huic. Erit quoque, ut quadratum ex $a c$, ad rectangulum sub $a c, c b$, ita quadratum ex $d f$, ad rectangulum sub $d f, f e$, contentum, et permutando, ut quadratum ex $a c$, ad quadratum ex $d f$, ita rectangulum sub $a c, c b$, contentum ad rectangulum sub $d f, f e$, comprehensum. Sunt autem quadrata ex $a c$, $d f$, inter se commensurabilia, igitur rectangula sub $a c, c b$, et sub $d f, f e$, contenta, commensurabilita crux, ut vult 10. propos. lib. huic.

Si vero rectangulum sub $a c, c b$, Rationale est. In ut recta $a b$, ex binis Mediis prima sit, erit et rectangulum sub $d f, f e$, Rationale, cum illi commensurabile sit ostensum, ac proprietas et recta $d e$, erit ex binis Mediis prima. Sed si rectangulum sub $a c, c b$, comprehensum faciet Medium, ita ut $a b$, sit ex binis Mediis secunda, erit et rectangulum sub $d f, f e$, illi commensurabile ostensum, Medium, ac proinde et recta $d e$, ex binis Mediis secunda.

Ei, igitur, que ex binis Mediis prima, ergo: Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM CLAVII.

Eodem modo demonstrabimus rectam lineam $d e$, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi $a c$, que ut ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atque ordine eadem ipsi $a b$, cui commensurabilis est, si modo loco commensurabilis longitudine in demonstratione discimus utique: commensurabilis potentia tantum, et c. Ut manifestum est.

Theor. 51. Propos. 69.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT recta $a b$, Maior diuisa in sua nomina, cuius maius nomen sit $a c$, minus vero $c b$, si que ei commensurabilis $d e$, sive longitudine et potentia, sive potentia tantum. Dico et $d e$, Maiorem esse.

$$\begin{array}{c} \text{C} \\ \hline a & \xrightarrow{\text{Bz}} & b \\ \text{Bz}(2\frac{7}{8} + \text{Bz} 2\frac{4}{3}) & + & \text{Bz}(2\frac{7}{8} - \text{Bz} 2\frac{4}{3}) \\ d & \xrightarrow{\text{f}} & e \end{array}$$

$$\begin{aligned} & a c, \text{Bz } 2\frac{7}{8} (2\frac{7}{8} + \text{Bz } 2\frac{4}{3}) \\ & c b, \text{Bz } 2\frac{7}{8} (2\frac{7}{8} - \text{Bz } 2\frac{4}{3}) \\ & a b, \text{Bz } 2\frac{7}{8} (2\frac{7}{8} + \text{Bz } 2\frac{4}{3}) + \text{Bz } 2\frac{7}{8} (2\frac{7}{8} - \text{Bz } 2\frac{4}{3}) \\ & d f, \text{Bz } 2\frac{7}{8} (\frac{27}{8} + \text{Bz } \frac{24}{3}) \\ & f e, \text{Bz } 2\frac{7}{8} (\frac{27}{8} - \text{Bz } \frac{24}{3}) \\ & d e, \text{Bz } 2\frac{7}{8} (\frac{27}{8} + \text{Bz } \frac{24}{3}) + \text{Bz } 2\frac{7}{8} (\frac{27}{8} - \text{Bz } \frac{24}{3}) \end{aligned}$$

FIDEM reliqua ut principia ut $a c, c b$, tandem habeant rationem ad $d f, f e$, ut tota $a b$, ad totam $d e$. Quoniam igitur $a b, d e$, commensurabiles sunt vel longitudine, et potentia, vel potentiam tantum, et non quaque recta $a c, d f$, et $c b, f e$, tandem modo inter se commensura-

Dd

biles, ut constat ex 10. propos. lib. huīus. Rursus quia est ut a c, ad d f, ita c b, ad f e, & permutando, ut a c, ad c b, ita d f, ad f e, erit ut quadratum ex a c, ad quadratum ex c b, ita quadratum ex d f, ad quadratum ex f e, & componendo, ut compositum ex rectarum quadratis a c, c b, ad quadratum ex c b, ita compositum ex rectarum quadratis ex d f, f e, ad quadratum ex f e, & conuertendo, ut quadratum ex c b, ad compositum ex rectarum quadratis a c, c b, ita quadratum ex f e, ad compositum ex rectarum quadratis d f, f e, & permutando, ut quadratum ex c b, ad quadratum ex f e, ita compositum ex rectarum quadratis a c, c b, ad compositum ex rectarum quadratis d f, f e. Sed quadratum ex c b, quadrato ex f e, est commensurabile, quod rectæ c b, f e, ostensæ sint commensurabiles, vel longitudine, & potentia simul, vel potentia tantum.

Quare compositum ex rectarum quadratis a c, c b, composito ex rectarum quadratis d f, f e, commensurabile erit.

Est autem compositum ex rectarum quadratis a c, c b, Rationale, cum rectæ a c, c b, Maiorem a b, componant. Igitur & compositum ex rectarum quadratis d f, f e, Rationale erit, ut vult 9. def. lib. huīus. Rursus quia est ut a c, ad c b, ita d f, ad f e, ut autem a c, ad c b, ita quadratum ex a c, ad rectangulum sub a c, c b, contentum, & ut d f, ad f e, ita quadratum ex d f, ad rectangulum sub d f, f e, comprehensum, ex lemma 3. Clavi propos. 19. lib. huīus, erit quoque ut quadratum ex a c, ad rectangulum sub a c, c b, ita quadratum ex d f, ad rectangulum sub d f, f e, contentum, & permutando, ut quadratum ex a c, ad quadratum ex d f, ita rectangulum sub a c, c b, ad rectangulum sub d f, f e.

Sunt autem quadrata ex a c, & d f, inter se commensurabilia, cum rectæ a c, d f, sint ostensæ commensurabiles, vel longitudine, & potentia simul, vel potentia tantum. Quare rectangula sub a c, c d, & d f, f e, contenta, sunt inter se commensurabilia, ut colligitur ex 10. propos. lib. huīus.

Sed rectangulum sub a c, c b, contentum, Medium est, igitur & rectangulum sub d f, f e, illi commensurabile. Medium erit, ut constat ex corollario Clavi propos. 24. lib. huīus. Cum autem sit ut a c, ad c b, sic d f, ad f e, sunt autem d f, f e, incommensurabiles potentia, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis, Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium: erit tota d e, ex illius duabus composta, Maior, ut vult 40. propos. lib. huīus.

Maiori igitur commensurabilis, & c. Quod erat ostendendum.

Theor. 52. Propos. 70.

RATIONAL ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale, ac Medium potens est.

SIT recta a b, Rationale, ac Medium potens diuisa in sua nomina, cuius maius nomen sit a c, minus vero c b, sique d e, ei commensurabilis, vel longitudine, & potentia simul, vel potentia tantum: Dico & d e, posse Rationale, & Medium, Isdem enim constructis ut in antecedenti propos. demonstrabimus compositum ex rectarum quadratis a c, c b, commensurabile esse composito ex rectarum quadratis d f, f e, Sed compositum ex rectarum quadratis a c, c b, Medium est, ut docet 41. propos. lib. huīus. Igitur compositum ex rectarum quadratis d f, f e, Medium erit cum illi sit commensurabile, ut colligitur ex corollario Clavi 24. propos. lib. huīus. Eodem modo ut in antecedenti propositione erunt rectangula sub a c, c b, & d f, f e, commensurabilia, sed rectangulum sub a c, c b, est Rationale, Igitur rectangulum sub d f, f e, Rationale erit:

Postremò rectæ d, f, e, vt in antecedenti propos. erunt potentia incommensurabiles, quæ cùm faciunt compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis, Rationale, vt,

$$a \frac{R\sqrt{R\sqrt{8(486+R\sqrt{8}162)}}}{R\sqrt{8(486-R\sqrt{8}162)}} b$$

$$d \frac{f}{R\sqrt{8(R\sqrt{30\frac{3}{8}}+R\sqrt{10\frac{1}{8}})}} c \frac{e}{R\sqrt{8(R\sqrt{30\frac{3}{8}}-R\sqrt{10\frac{1}{8}})}}$$

$$a c, R\sqrt{8}(R\sqrt{8}486+R\sqrt{8}162)$$

$$c b, R\sqrt{8}(R\sqrt{8}486-R\sqrt{8}162)$$

$$d f, R\sqrt{8}(R\sqrt{8}30\frac{3}{8}+\frac{1}{8})$$

$$f e, R\sqrt{8}(R\sqrt{8}30\frac{3}{8}-\frac{1}{8})$$

ostensum est, erit tota d, e, ex illis duabus composita, Rationale, ac Medium potens, vt vale 4L propos. lib. huius. Quare Rationali, ac Medium potenti, &c. c. Quod erat ostendendum.

Theor. 53. Propos. 71.

B I N A. Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT recta a b, bina Media potens divisa in sua nomina, sitque illius maius nomen a c, minus verò c b, Sit autem recta d e, commensurabilis ipsi a b, sive longitudine, & potentia simul, sive potentia tantum. Dico rectam d e, esse bina Media potentem. Isdem enim constructis ut supra demonstrabimus, vt in 69. propositione compositum ex rectarum quadratis a c, c b, & compositum ex rectarum quadratis d f, f e, inter se esse commensurabilia, similiter rectangulum sub a c, c b, commensurabile esse rectangulo sub d f, f e, contento:

$$a \frac{R\sqrt{R\sqrt{8(972+R\sqrt{8}405)}}}{R\sqrt{8(972-R\sqrt{8}405)}} b$$

$$d \frac{f}{R\sqrt{8(R\sqrt{60\frac{3}{4}}+R\sqrt{25\frac{5}{16}})}} c \frac{e}{R\sqrt{8(R\sqrt{60\frac{3}{4}}-R\sqrt{25\frac{5}{16}})}}$$

$$a c, R\sqrt{8}(R\sqrt{8}972+R\sqrt{8}405)$$

$$c b, R\sqrt{8}(R\sqrt{8}972-R\sqrt{8}405)$$

$$d f, R\sqrt{8}(R\sqrt{8}60\frac{3}{4}+\frac{5}{16})$$

$$f e, R\sqrt{8}(R\sqrt{8}60\frac{3}{4}-\frac{5}{16})$$

Igitur cùm tam compositum ex rectarum quadratis a c, c b, quam rectangulum sub a c, c b, Medium sit, erit ex corollario Clavi propos. 24. lib. huius, compositum ex rectarum quadratis

a, c, e, b , & rectangulum sub ipsis contentum, Medium. Sed recte d f, f e, ut prias sunt potentia incommensurabiles. Postrem quoniam compositum ex rectarum quadratis a, c, e, b, & rectangulum sub ipsis comprehensum, incommensurabilia sunt ut vult 42. propos. lib. huius. Sit autem compositum ex rectarum quadratis d f, f e, ostensum commensurabile composite ex rectarum quadratis a, c, e, b, & rectangulo sub a, c, e, b, si. etiam commensurabile demonstratum, tunc ex scholio Clavi propos. 14. lib. huius, compositum ex rectarum quadratis d, f, f e, & rectangulum sub ipsis comprehensum, incommensurabilia. Igitur cum d f, f e, sint rectae potentiae incommensurabiles, que faciunt compositum ex ipsis quadratis, Medium, & rectangulum sub ipsis contentum, sed incommensurabile que composite ex ipsis quadratis, erit tota d e, bina Media potens ut vult propos. 42. lib. huius. Quare bina Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendendum.

Theor. 54. Propos. 72.

Si Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, vel ea quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale, ac Medium potens.

SIT Rationale spatium a, b, cum quo componatur spatium Medium c, d. Dico rectamque rotum spatium a, d, potest esse unam ex illis quatuor, quæ sunt nominatae in hac propositione. Erit enim rectangulum a, b, vel Maius, vel minus, quam c, d, & quale enim esse non potest, Alias cum a, b, Rationale ponatur, essent ambo Rationalia, quod est contra hypothesis: Sit igitur rectangulum a, b, Rectangulo c, d, maius, & Rationali e, f, exposita applicetur ad eam rectangulum e, g, rectangulo a, b, & quale & ad h, g, que Rationali e, f, exposita est aequalis, applicetur aliud rectangulum h, i, rectangulo c, d, & quale.

Quoniam a, b, est Rationale, & c, d, Medium, erit quoque rectangulum e, g, Rationale, & rectangulum h, i, Medium.

Rationale autem applicatum ad Rationalem aetiam longitudinem facit Rationalem eique Rationali longitudine commensurabilem, ut vult 20. propos. lib. huius, quare latitudo e, h, Rationalis erit & ipsi e, f, commensurabilis longitudine.

Medium vero ad Rationalem applicatum latitudinem facit Rationalem, sed ei incommensurabilem longitudinem, ut constat ex 23. propos. lib. huius: Quare latitudo h, k, Rationalis erit, & ipsi h, g, longitudine incommensurabilis.

Rursus cum rectangula e, g, & h, i, inter se sint incommensurabilia, Cum e, g, Rationale sit, h, i, vero Rationale prout recte o, b, h, k, eandem cum illis habentes Rationem incommensurabiles longitudine, ut vult 10. propos. lib. huius. Rationales tamen iam sunt ostensa rectæ e, h, h, k, Rationales igitur & tantum potentia commensurabiles sunt, Ac propterea tota e, k, ex illis duabus composita Irrationalis, que ex binis nominibus dicuntur, ut vult 37. propos. lib. huius.

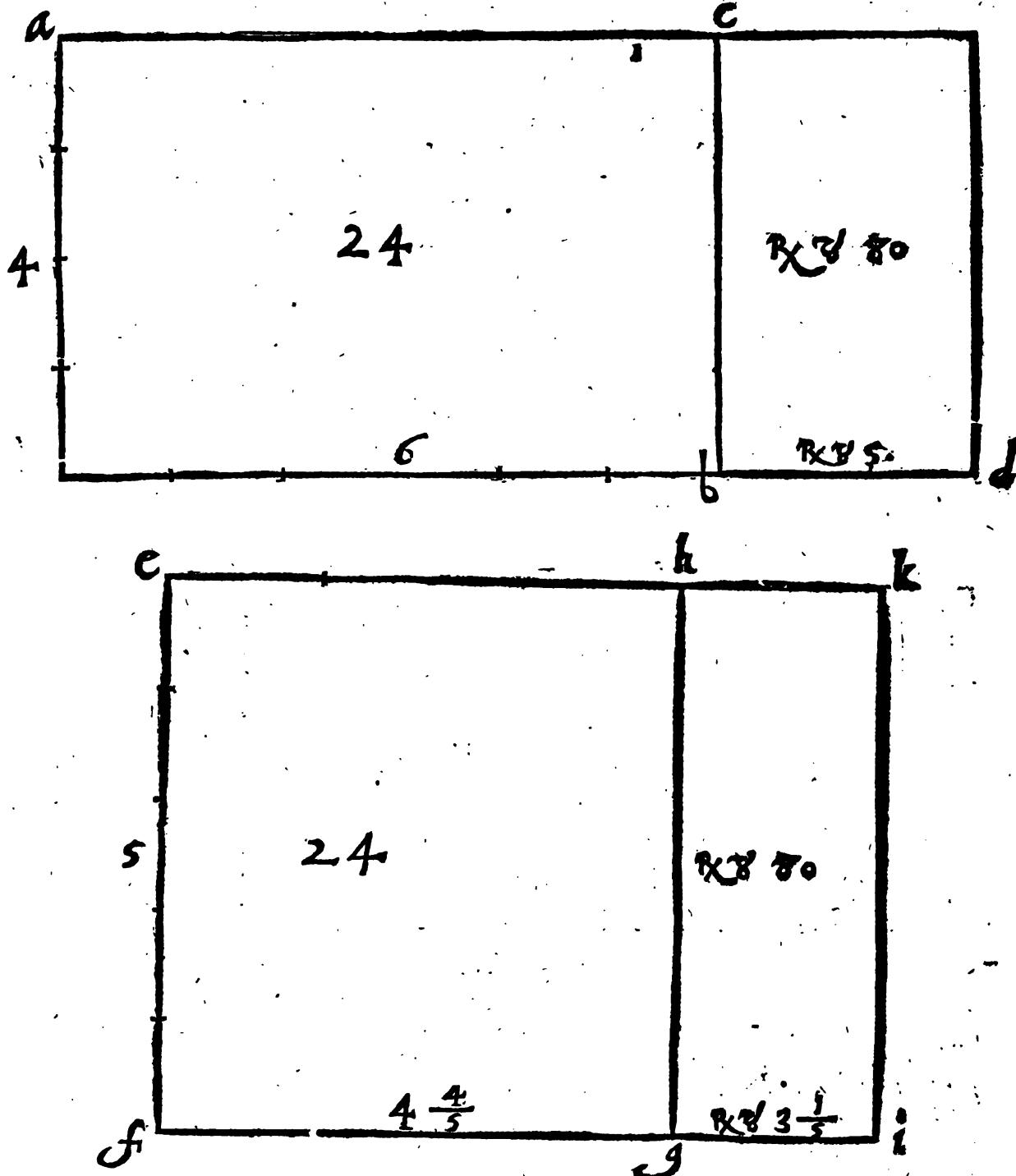
Quoniam vero rectangulum a, b, maius ponitur, quam c, d, hoc est, rectangulum e, g, maius quam h, i, erit quoque recta e, h, maior, quam h, k, cum e, h, b, k, eandem habeant rationem inter se, quam rectangula e, g, h, i, ut constat ex 1. propos. lib. 6.

Iam vero recta e, h, plus poterit, quam minor h, k, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Si plus posse e, h, quam h, k, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, tria e, k, ex binis nominibus prima, cum maius nomen ipsius e, b, commensurabilis.

ELEMENTVM DECIMVM,

109

rabile sit ostensum Rationali et f expofita: Quare recta, que spatium e i, poterit, contentum sub Rationali et f, ex binis nominibus prima e k, atque adeo ex spatium a d, compositum ex Ra.



Recta potens Rectangul. e i. $Rx 3 \left(\frac{60}{5} Rx 3 \frac{1100}{115} \right)$ $Rx 3 \left(\frac{10}{1} - Rx 3 \frac{1100}{115} \right)$ que Maior dicitur.
vel $Rx 3 (12 + Rx 3 124)$ $Rx 3 (12 - Rx 3 124)$
 $f i, Rx 3 \frac{14}{5} + Rx 3 \frac{16}{5}$ Ex binis nominibus quarta.

tionali a b, et Medio c d, Irrationalis est, qua ex binis nominibus dicitur ut constat ex ss. propos. lib. huic.

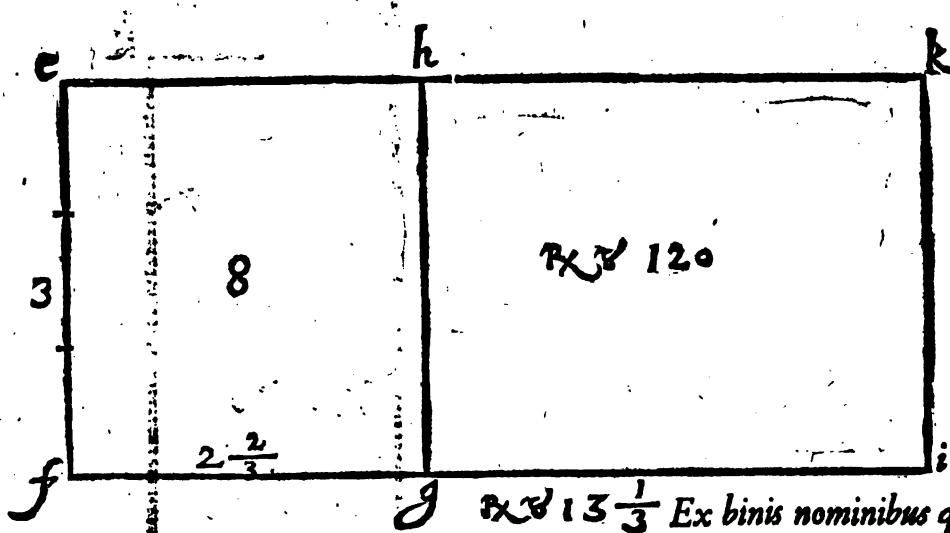
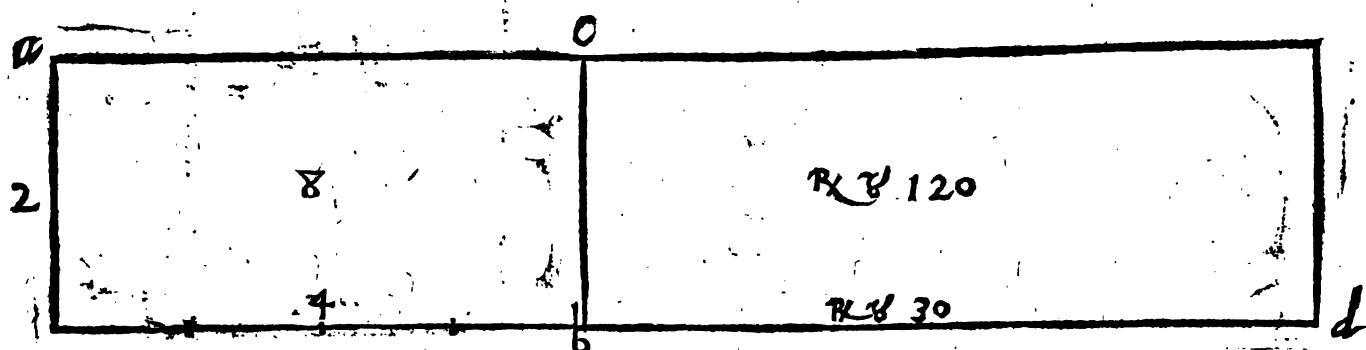
Sed si recta e h plus possit, quam h k, quadrata recta sibi longitudine incommensurabilis erit ex e k, ex binis nominibus quarta ex definitione quarta secundarum definitionum lib. huic.

E c

EVCLIDIS

cum maius nomen e h, commensurabile sit ostensum Rationali exposita e f. Igitur recta, quæ posserit spatium e i, contentum sub Rationali e f ex binis nominibus quarta e k, Atque adeo e f spatium a d, Irrationalis erit, quæ vocatur Maior, ut constat ex 58. propos. lib. huins.

SIT deinde rectangulum a b, minus, quam rectangulum c d, e f reliqua construantur ut prius. Erit igitur ut prius e k, ex binis nominibus e h, ipsi e f, longitudine commensurabilis.



Linea potens rectang. e i, $Rx 8 \left(Rx 8 \frac{20}{27} + Rx 8 \frac{27}{20} \right) + Rx 8 \left(Rx 8 \frac{20}{27} - Rx 8 \frac{27}{20} \right)$
que Rationale, ac Medium potens appellatur.

vel $Rx 8 \left(Rx 8 30 + Rx 8 14 \right) + Rx 8 \left(Rx 8 30 - Rx 8 14 \right)$

Quoniam verò a b, minus est, quam c d, hoc est e g, quam h i, erit quoque recta e h, minor, quam h k. Poterit igitur rursus maius nomen h k, plus, quam minus quadrato recte sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si verò maius nomen h k, plus possit, quam minus quadrato recte sibi commensurabilis longitudine, erit e k, ex binis nominibus secunda, cum minus nomen e h, Rationali e f, exposita sit longitudine commensurabile. Quare recta potens spatium e i, contentum sub Rationali e f, e ex binis nominibus secunda e k, Atque adeo e f spatium a d, ex Rationali a b, e f Medio c d, compositum, Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima vocatur, ut vult propos. 56. lib. huins.

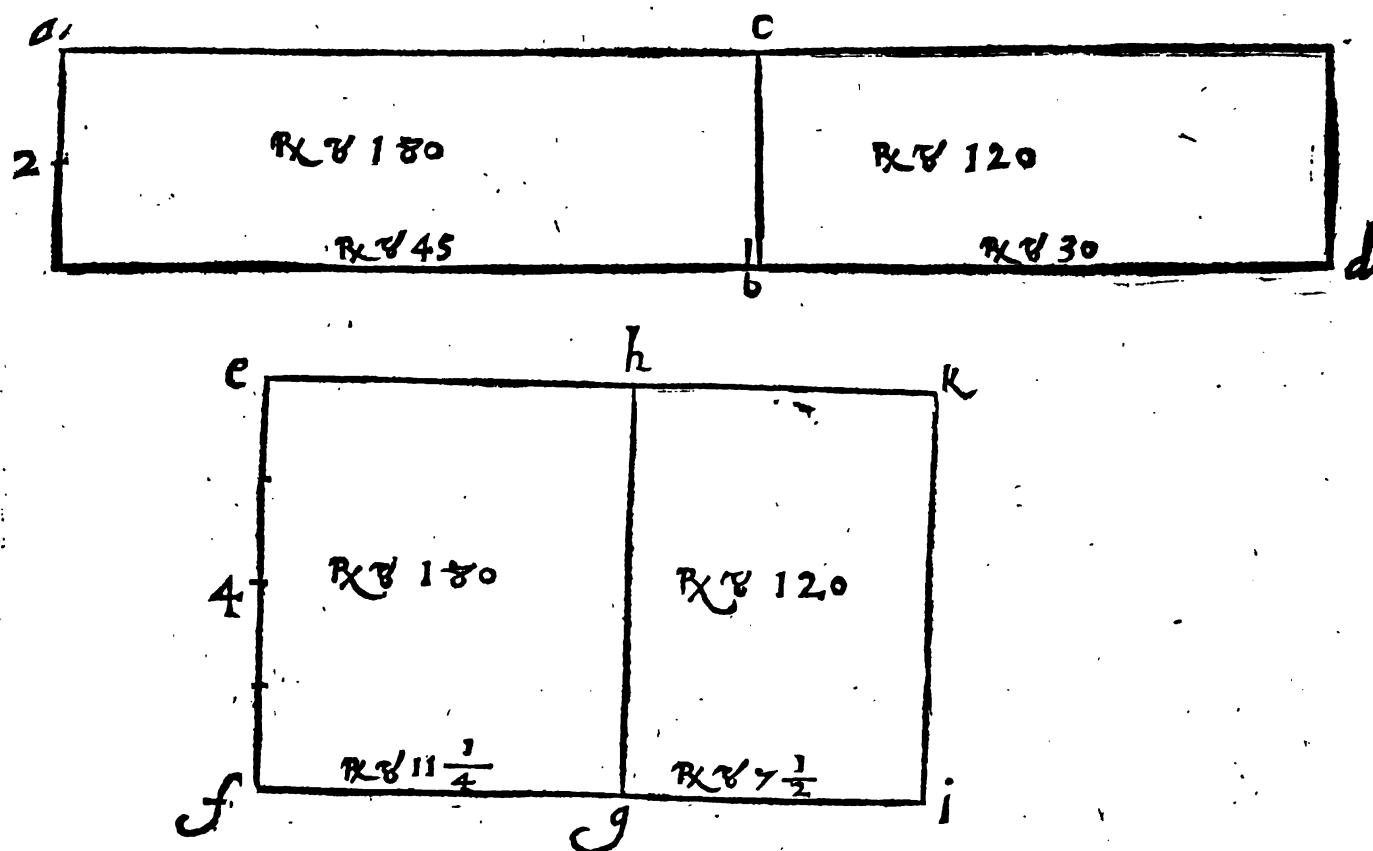
Si verò h k, plus possit, quam e h, quadrato recte sibi incommensurabilis longitudine, erit

e k, ex binis nominibus quinta, cum minus nomen e h, Rationali expositæ longitudine commensurabile sit ostensum. Ac proinde recta potens spatium e i, contentum sub Rationali e f, & ex binis nominibus quinta e k, Atque adeo & spatium a d, Irrationalis est, que Rationale, ac Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, ac Medium componantur, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 55. Propos. 73.

Si duo media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis mediis secunda, vel bina Media potens.

C O M P O N A N T V R duo Media incommensurabilia a b, c d, Dico rectam, que spatium a d, potest, esse unam ex illis duabus, quæ nominantur in propositione. Erit enim a b, vel maius, vel minus, quam c d, aequalia enim non erunt, alias essent commensurabilia. Quod est contra hypothesin. Sit primò maius, & cætera fiunt ut in antecedenti.



Linea potens rectang. e i. $R. & \left(R. & \frac{70}{16} + R. & \frac{120}{16} \right) + R. & \left(R. & \frac{70}{16} - R. & \frac{120}{16} \right)$
 vel $R. & \left(R. & 45 + R. & 15 \right) + R. & \left(R. & 45 - R. & 15 \right)$ que bina Media potens appellatur.
 $f i, R. & \frac{9}{4} + R. & \frac{9}{4}$ ex binis nominibus sexta.

Igitur quia spatia a b, c d, Media & incommensurabilia ponuntur, erunt & rectangula e g, h i, Media, & incommensurabilia: Quare & rectæ e h, h k, eandem cum illis rationem habentes, longitudine erunt incommensurabiles, ut vult 10. propos. lib. huius. Media autem illa ad Ra-

tionales e f, h g, applicata latitudines faciunt e h, h k, Rationales, & Rationalibus e f, h g, longitudine incommensurabiles, ut vult 23. propos. lib. huius: Sed Rationales sunt e h, h k, Igitur Rationales, & tantum potentia commensurabiles inter se, Ac proinde recta e k, ex illis duabus composita, Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, ut vult 37. propos. lib. huius.

Quoniam igitur ut in antecedenti propositione a b, ponitur maius, quam c d, poterit recta e h, plus, quam h k, quadrato sibi commensurabilis longitudine vel incommensurabilis. Si plus possit quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum utrumque nomen Rationali e f, exposita longitudine incommensurabile sit ostensum, erit ex tertia definitione secundarum definitionum recta e k, ex binis nominibus tertia.

Quare recta potens spatium e i, contentum sub Rationali e f, & ex binis nominibus tertia e k, Atque adeo & spatium a d, irrationalis est quæ ex binis Mediis secunda dicitur, ut vult 37. propositionis libri huius.

Si verò recta e h, plus possit, quam h k, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum utrumque nomen Rationali exposita e f, sit longitudine incommensurabile, erit e k, ex definitione sexta secundarum definitionum ex binis nominibus sexta. Igitur linea potens spatium e i, contentum sub Rationali e f, & ex binis nominibus sexta e k, Atque adeo & spatium a d, Irrationalis est, quæ bina Media potens appellatur, ut constat ex 60. propos. lib. huius.

Sed si rectangulum a b, minus sit, quam c d, non aliter propositum demonstrabimus, ut constat ex figura. Quare si duo Media, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM EX CLAVIO.

Ex his omnibus facile colligitur, eam quæ ex binis nominibus & reliquas ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Mediae, neque inter se easdem esse.

¹, 23. decimi. Nam quadratum Mediae, ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit Rationalem ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.

¹, 61. decimi. At quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus primam.

¹, 62. decimi. Et quadratum eius, quæ est ex binis Mediis prima ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

¹, 63. decimi. Quadratum deinde eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

¹, 64. decimi. At verò quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

¹, 65. decimi. Quadratum autem eius, quæ Rationale ac Medium potest ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

¹, 66. decimi. Postremò quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

Itaque cum haec latitudines differant & à latitudine Media, & inter se, à latitudine quidem Media, quod hæc Rationalis sit, illæ verò Irrationales; Inter se autem, quod ordine non sint eadem ex binis nominibus, perspicuum est omnes Irrationales lineas, de quibus hæc tenus est dictum, inter se differentes esse.

SCHOLIUM EX CLAVIO.

HACTENVS erit Euclides de septem senariis.

In primo qui continetur propos. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum sex linearum Irrationalium, numerum eius, que ex binis nominibus, & eius, que ex binis Mediis prima, & eius, que ex binis Mediis secunda; & Maioris, & eius, que Rationale, ac Medium potest, & denique eius, que potest bina Media.

In secundo, quem continent propos. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. erit de eorum divisionibus, docens singulas in singulis dimittat plantis dividis posse in sua nomina.

In tertio deinde contento propos. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inventionem sex linearum, que ex binis nominibus dicuntur, videlicet prima, secunda, tertia, quarta, quinta & sexta.

In quarto quem absolvunt propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit quomodo haec sex linearum Irrationales, que in primo senario explicantur, inter se differant, docens quenam linea Irrationalis sit illa, que potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

In

In quanto autem quem reperies in propos. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quae non latitudines Irrationales faciunt quadratas linearum Irrationalium in primo senario explicatae sunt, ad Rationalem lineam applicata.

In sexto vero, qui quaque propos. nmp. 67. 68. 69. 70. & 71. absolvitur, demonstrantur lineam quaecumque commensurabilis alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

In septimo denique contento duabus propositionibus, numeris 72. & 73. explicant rursus differentiam aliam sex predictarum Irrationalium.

Reperiatur autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionabilitas Arithmetica, que quidem consistit in excessu eodem. Et recta Media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina eiusdem lineae Irrationalis, est quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nominata media existit.

Sic enim quaecumque Irrationalis, nmp. ex binominibus a b, cuius maius nomen a c, & dividatur a b, bifariam in d: &

$$a b, 9 + Bz 8 45.$$

$$a c, 9.$$

$$4 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

cuius dimidiae a d, vel d b, equalis sumatur e. Dico e, medium esse secundum Analogiam Arithmeticam, inter a c, & b, & esse quaque ex binis nominibus. Quoniam enim a c, superat dimidiam a d, recta d c, & dimidia d b, superat ipsam c b, eadem recta d c, perspicuum est, dimidiari ipsius a b, nmp. e, esse medium proportionale inter a c, & b, in Analogia Arithmetica.

Rursus quia e, commensurabilis est longitudine toti a b, cum hec illius sit dupla; erit & e, Irrationalis eadem ipsi a b, ut in sexto senario est demonstratum.

Idem ostendemus non aliter in ceteris lineis Irrationalibus contingere.
Sequuntur iam septem alijs senarij, in quibus eadem Euclides demonstrat, de sex aliis lineis Irrationalibus, que per detractionem generantur, que in precedentibus septem senariis de Irrationalibus, que per compositionem sunt, cum ostendisse docimur.

PRINCIPIVM SENARIORVM PER DETRACTIONEM.

Theor. 56. Propos. 74.

Ià Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

EX Rationali a b, detrahatur Rationalis a c, illi tantum potentia commensurabilis. Dico reliquam b c, esse Irrationalem. Nam cum ex lemma 3. Clavis propos. 19. hanc sit, sic ut

$$a b, 9$$

$$a c, Bz 8 45.$$

$$c b, 9 - Bz 8 45.$$

a b, ad a c, ita quadratum ex a b, ad rectangulum sub a b, a c, sunt autem a b, & a c, incommensurabiles longitudine, erunt quadratum ex a b, & rectangulum sub a b, a c, contentum incommensurabilia. Sed quadrato ex a b, commensurabile est compositum ex rectarum quadratis a b, a c. Cum enim a b, a c, commensurabiles sint potentia, erunt earum quadrata commensura-

ff

bella ac proinde compositum ex ipsis quadratis, utrique quadrato ex $a b$, $a c$, descripto, commensurabile, ut constat ex 16. propos. lib. huius. Rectangulo vero sub $a b$, $a c$, contento commensurabile est, quod bis sub ipsis continetur. Quare ex scholio Clavi propos. 14. lib. huius compositum ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, & rectangulum sub ipsis contentum, incommensurabilia sunt. Est autem compositum ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, & rectangulo bis sub $a b$, $a c$, vna cum quadrato ex $b c$, ut constat ex 7. propos. lib. 2. Quare compositum ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, quadrato ex $b c$, est incommensurabile ut vult coroll. Clavi propos. 17. lib. huius. Igitur cum compositum ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, Rationale sit, erit quadratum ex $b c$, illi incommensurabile, Irrationale. Atque adeo ex recta $b c$, Irrationalis. Vocetur autem Aporome, sive Residuum. Si igitur à Rationali, & c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I V M C L A V I I .

P O T V I S S E T Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

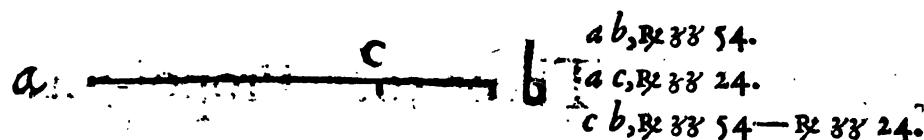
S i à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen ~~adferatur~~ Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Aporome.

N. A. M. cum $a b$, $a c$, sint Rationales potentia tantum commensurabiles, erit compositum ex ipsis Irrationalibus, quæ ex binis nominibus dicuntur, minus nomen $a b$, & minus $a c$. Aferitur igitur $a c$, minus nomen ex maiori nomine $a b$, ut relinqua- tur Aporome $b c$.

Theor. 57. Propos. 75.

S i à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Aporome prima.

D E T R A H A T V R ex Media $a b$, Media $a c$, si tantum commensurabilis poten- tia, siquæ rectangulum sub Mediis $a b$, $a c$, Rationale. Dico reliquam $b c$, esse Irrationalem.



Cum igitur recta $a b$, $a c$, Mediae sint potentia tantum commensurabiles, erunt quadrata ex illis descripta, Media, & commensurabilia, & compositum ex ipsis quadratis $a b$, $a c$, utriusque quadrato ex $a b$, $a c$, descripto, commensurabile erit, & Medium, ut vult 16. propos. lib. huius.

Quoniam vero rectangulum sub Mediis $a b$, $a c$, concencum, Rationale positor, erit, & quod bis sub ipsis continetur, Rationale.

Quare rectangulum bis sub $a b$, $a c$, quod est Rationale, incommensurabile erit composito ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, quod est Medium. Igitur cum compositum ex rectarum quadratis $a b$, $a c$, & rectangulo bis sub $a b$, $a c$, contento vna cum quadrato ex $b c$, ut vult 7. propos. lib. 2. erit quoque rectangulum bis sub $a b$, $a c$, vna cum quadrato ex $b c$, rectangulo bis sub $a b$, $a c$, incommensurabile. Quare rectangulum bis sub $a b$, $a c$, & quadratum ex $b c$, incommensurabilia sunt. Cum igitur rectangulum bis sub $a b$, $a c$, Rationale sit, erit quadratum ex $b c$, ut incommensurabile, Irrationale, & proinde recta $b c$, Irrationalis. Vocetur autem Media Aporome prima. Si igitur à Media, & c. Quod erat demonstrandum.

POTVISSET bac propofitio proponi hoc modo.

Si à thalor nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome prima.

Quæcunq; à b, c, sunt Mediæ potentia solam commensurabilis, continetque Rationale; erit composita ex ipsis Irrationalibus, quæ ex binis Mediis prima dicuntur, cuius minus nomen a, & minus a, c. Auferatur igitur a, c, minus nomen ex maiori a, b, ut reliqua b, c, Media Apotome prima.

Theor. 58. Propof. 76.

Si à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ etiam tota Medium continet; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome secunda.

D E T R A H A T V R à Media a b, Media a c, quæ sit tantum commensurabilis potentia Media a b, sive rectangulum sub Mediis a b, a c, contentum, Medium. Dico reliquam b, c, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex Mediis a b, a c, potentia inter se commensurabilibus, Media sunt, & inter se commensurabilia, erit compositum ex ipsis quadratis virisque quadrato ex Mediis a b, a c, descripto, commensurabile, ut vult 16. propos. libri huic. Sunt autem quadrata illa Media. Igitur & compositum illud, Medium erit, ex corollario Clavi propos. 24. libri huic.

Rursus quia rectangulum sub Mediis a b, a c, ex hypothesi Medium est, erit & quod bis sub a, b, a c, consistet, Medium ex eodem corollario Clavi.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & a & b \\ & & & & \hline & & & & & a & c \\ & & & & \hline & & & & & c & b \\ & & & & \hline & & & & & a b, & b c \\ & & & & \hline & & & & & a c, & b c \\ & & & & \hline & & & & & c b, & b c - b c \\ & & & & \hline & & & & & 128, & 18. \\ & & & & \hline & & & & & 128 - 18. & \end{array}$$

Cum autem compositum ex rectarum quadratis a b, a c, aequale sit rectangulo bis sub a b, a c, comprehenso una cum quadrato ex b c, per 7. propos. lib. 2. superabit compositum ex rectarum quadratis a b, a c, rectangulum bis sub ipsis contentum quadrato b c. Sunt autem ambo Media, nimis compositum ex rectarum quadratis a b, a c, & rectangulum bis sub illis contentum.

Igitur cum definiitione superet Medium, Rationali, non erit quadratum ex b c, Rationale, sed Media, ut constat ex 27. propos. lib. huic recta quoque b c, Irrationalis, que Media Apotome secunda vocatur. Si igitur à Media, Media auferatur, &c. Quod erat ostendum.

HOC etiam Theorema ita posuisse potuisse.

Si à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome secunda.

Quoniam enim a b, a c, Mediæ sunt potentia tandem commensurabilis, continetque Medium; erit composita ex ipsis Irrationalibus, quæ ex binis Mediis secundis appellatur, cuius minus nomen a, & minus a, c, auferatur igitur a, c, minus nomen ex maiori a, b, ut reliqua b, c, Media Apotome secunda.

Theor. 59. Propos. 77.

Si à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsis quadratis, Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR ex recta a b, recta a c, potentia incommensurabilis ipsi a b, siveque compositum ex ipsis quadratis, Rationale, rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium. Dico reliquam b c, esse Irrationalem.

$$\begin{aligned} &a \xrightarrow{\quad} c \\ &\text{length } ab = b \\ &\text{length } ac = c \\ &\text{total length } ac = a b, b c (18 + b c 108) \\ &\text{length } bc = b c, b c (18 - b c 108) \\ &\text{length } ab = c b, b c (18 + b c 108) - b c (18 - b c 108) \end{aligned}$$

Quoniam enim compositum ex rectarum quadratis a b, a c, est Rationale, rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium, Ac proinde & quod bis sub a b, a c, erunt compositum ex rectarum quadratis a b, a c, & rectangulum sub ipsis comprehensum, incommensurabilia: Est autem compositum ex rectarum quadratis a b, a c, aequalē rectangulo bis sub a b, a c, contento vna cum quadrato ex b c, ut constat ex 7. lib. 2. Quare ex corollario Clavi propos. 17. lib. huius, compositum ex rectarum quadratis a b, a c, quadrato ex b c, est incommensurabile.

Est autem compositum illud Rationale. Quare quadratum ex b c, illi incommensurabile, Irrationale est, Ac proinde & recta b c, Irrationale, qua vocetur Minor. Si à recta igitur recta auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I V M C L A V I I .

S I C etiam Theorema hoc poserat proponi.

Si à maiori nomine linea Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est: Vocetur autem Minor.

Nam cum a b, a c, sint potentia incommensurabiles, que faciunt compositum quidem ex ipsis quadratis, Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: erit composita ex ipsis Irrationalis, que vocatur Major, eiusque minus nomen a b, minus minus a c, auferitur igitur a c, minus nomen ex maiori a b, ut relinquatur Minor b c.

Theor. 60. Propos. 78.

Si à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsis quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta a b, recta a c, ipsi a b, incommensurabilis, siveque compositum ex rectarum quadratis a b, a c, Medium, rectangulum verò sub ipsis comprehensum, Rationale. Dico reliquam b c, esse Irrationalem.

Nam cum compositum ex rectarum quadratis a b, a c, Medium sit, rectangulum verò sub illis contentum, Rationale, Ac proinde & quod bis sub a b, a c, continetur, erunt compositum ex rectarum quadratis a b, a c, & rectangulum bis sub ipsis contentum, incommensurabilia: Compositum autem ex rectarum quadratis a b, a c, aequalē est rectangulo bis sub a b, a c, vna cum qua-

ELEMENTVM DECIMVM.

117

drato ex $b c$, ut constat ex 7. propos. lib. 2. Quare rectangulum bis sub $a b, a c$, una cum quadrato ex $b c$, incommensurabile est rectangulo bis sub $a b, a c$, comprehenso.

$$\begin{array}{c} \text{a} \quad \text{c} \\ \hline \text{b} \end{array}$$

$$a b, Bz 3' (Bz 3' 216 + Bz 3' 72)$$

$$a c, Bz 3' (Bz 3' 216 - Bz 3' 72)$$

$$c b, Bz 3' (Bz 3' 216 + Bz 3' 72) - Bz 3' (Bz 3' 216 - Bz 3' 72)$$

Sunt autem rectangulum bis sub $a b, a c$, ex quadratum ex $b c$, inter se incommensurabilia ut vult 17. propos. lib. huius. Quare cum rectangulum bis sub $a b, a c$, Rationale existat, erit quadratum ex $b c$, ei incommensurabile, Irrationale. Ac propterea ex rectab c , Irrationalis, que vocatur cum Rationali, ac Medium totum efficiens. Igitur si à recta, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM CLAVII.

HOC etiam modo Euclides Theorema hoc potuisse proponere.

Si à maiori nomine eius, quæ Rationale, ac Medium potest, minus nomen auferatur, Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

Cum enim $a b, a c$, sint potentia incommensurabiles, que faciunt compositum quidem ex ipsis quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; erit compositum ex ipsis Irrationalis, que nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est $a b$, minus autem $a c$. Auferatur igitur minus nomen $a c$, à maiori $a b$, ut $b c$, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.

Theor. 61. Propos. 79.

Si à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compōsitum ex ipsis quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabilēque composito ex quadratis ipsis: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta $a b$, recta $a c$, potentia incommensurabilis ipsi $a b$, siveque tam compositum ex ipsis quadratis $a b, a c$, quam rectangulum sub ipsis contentum, Medium. Et rectangulum illud sit etiam incommensurabile composito ex rectarum quadratis $a b, a c$. Dico reliquam $b c$, esse Irrationalem.

$$\begin{array}{c} \text{a} \quad \text{c} \\ \hline \text{b} \end{array}$$

$$a b, Bz 3' (Bz 3' 180 + Bz 3' 60.)$$

$$a c, Bz 3' (Bz 3' 180 - Bz 3' 60.)$$

$$c b, Bz 3' (Bz 3' 180 + Bz 3' 60) - Bz 3' (Bz 3' 180 - Bz 3' 60.)$$

Nam cum compositum ex rectarum quadratis $a b, a c$, rectangulo bis sub $a b, a c$, sit aequale una cum quadrato ex $b c$, ut vult 7. propos. lib. 2. Superabit compositum ex rectarum quadratis $a b, a c$, rectangulum bis sub ipsis contentum, quadrato $b c$. Sed Medium non superat Medium, Rationali. Quare cum tam compositum ex rectarum quadratis $a b, a c$, Medium sit quam rectangulum bis sub ipsis contentum, Non erit quadratum ex $b c$, Rationale, sed Medium, & ideo rectab c , Irrationalis, que cum Medio Medium totum efficiens appellatur. Igitur si à recta, &c. Quod erat ostendendum.

Gg

E V C L I D I S
S C H O L I V M C L A V I I .

In hunc modum proponi quoque permittet hoc Theorema.

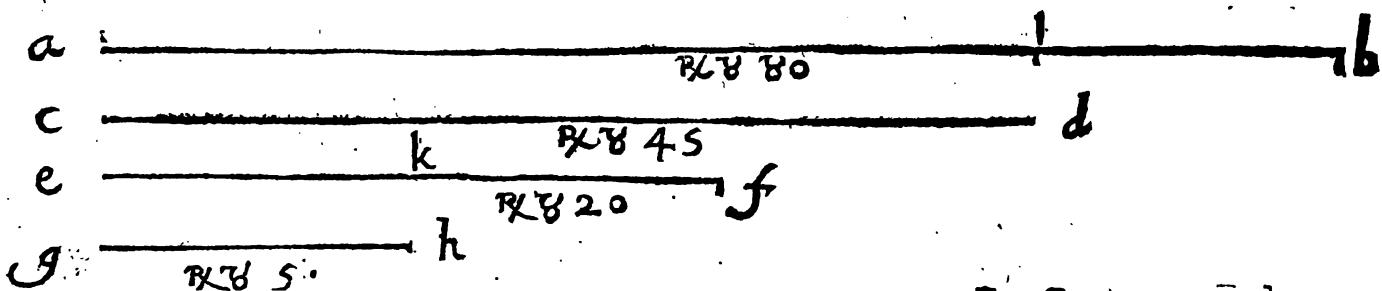
S i à maiori nomine eius, quæ bina Media potest minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

Q U O N I A M cum a b, a c, sint potentia incommensurabiles, facientque & compositum ex ipsarum quadratis, Medium, & rectangulum sub ipsis, Medium, incommensurabile que composite ex quadratis ipsarum, erit composita ex illis Irrationalis, que bina Media potens dicuntur, cuius minus nomen a b, & manus a c. Auferatur igitur minus nomen a c, ex maioris a b, ut relinquantur b c, cum Medium Medium totum efficiens.

L E M M A .

S i idem excessus sit inter primam magnitudinem & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem, & quartam.

S I N T quatuor magnitudines a b, c d, e f, g h, siveque i b, excessus inter a b, c d, aequalis excessus k f, inter e f, g h. Dico eundem esse excessum inter a b, e f, qui inter c d, g h.



Excessus magn. x 3 5.

Quoniam enim i b, excessus est inter a b, & c d; erit a i, ipsi c d, aequalis. Eodem modo aequalis erit e k, ipsi g h. Idem igitur excessus erit inter a i, & e k, qui inter c d, & g h, cum haec magnitudines illis sint aequales, singula singulis. Est autem totorum a b, c d, ex pronunciato 16. lib. 1. idem excessus, qui inter a i, e k; quod i b, k f, aequales ponantur. Igitur idem quoque excessus erit inter a b, & e f, qui inter c d, & g h, quod est propositum.

C O R O L L A R I V M E X C L A V I O .

Ex his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmeticam Analogiam, quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

T heor. 62. Propos. 80.

A P O T O M & vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solùm commensurabilis existens roti.

S I T Apotome a b, eique congruens b c, potentia tantum roti a c, commensurabilis. Dico ipsi a b, nullam aliam Rationalis congruere posse, quæ sit etiam potentia tantum commensurabilis.

Si enim fieri potest, congruat ei alia Rationalis b d, ita ut b d, ipsi a d, sit etiam tantum potentia commensurabilis.

Quoniam igitur recta b c, Rationalis est, erit a c, que ei potentia commensuratur, Rationalis;

Si proinde Rationales erunt a c, b c, & tantum potentia commensurabiles: pari ratione erunt a d, d b, Rationales, & tantum commensurabiles potentia.

$$\begin{array}{c} b \\ \hline a c, 9. & b c, \cancel{3} 3 4 5. & a b, 9 - \cancel{3} 3 4 5. \\ c & & d \end{array}$$

Quia verò idem est excessus inter compositum ex rectarum quadratis a c, b c, & rectangulum bis sub ipsis continentum, qui inter compositum ex rectarum quadratis a d, d b, & rectangulum sub a d, d b, comprehensum (superatur enim rectangulum bis sub a c, b c, à composito ex rectarum quadratis a c, b c, quadrato a b, ut vult 7. propos. lib. 2. Eodemque modo & rectangulum bis sub a d, d b, superatur à composito ex rectarum quadratis a d, d b, quadrato etiam ex a b, descripro). Quare permutando ex lemma Clavi antecedentis propositionis, idem excessus erit inter compositum ex rectarum quadratis a c, b c, & inter compositum ex rectarum quadratis a d, d b, qui in se rectangulum bis sub a c, b c, & rectangulum bis sub a d, d b:

Est autem excessus inter illa composita spatiū Rationale, cum tam compositum ex rectarum quadratis a c, b c, quam compositum ex rectarum quadratis a d, d b, Rationale ponatur, ut constat ex scholio Clavi propos. 2. 7. lib. huiss. Quare excessus inter rectangulum bis sub a c, b c, & rectangulum bis sub a d, d b, spatiū est etiam Rationale: Quoniam verò rectangulum sub a c, b c, potentia solum commensurabilis, Medium est, ut docet 22. propos. huiss lib. erit & eius duplum, Medium, ex corollario Clavi propos. 2. 4. lib. huiss eademque ratione, & quod bis sub a d, d b, Medium erit. Medium autem non superat Medium, Rationale. Quare excessus inter rectangulum bis sub a c, b c, & rectangulum bis sub a d, d b, spatiū non est Rationale. Sed Rationale, cum esse ostendimus. Quod absurdum. Quare Apotome a b, una tantum Rationalis linea congruit nimis b c, quæ ei est potentia commensurabilis. Quod erat ostendendum.

Theor. 63. Propos. 81.

MEDIA Apotomæ primæ una tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Media Apotomæ prima a b, & illi congruens b c, Media, que roti a c, sit solum potentia commensurabilis, si que rectangulum bis sub a c, b c, Rationale. Dico ipsi a b, nullam aliam Medianam congruere posse, que etiam sit roti a c, potentia commensurabilis.

Si enim fieri potest congruere alia b d, Media roti etiam a d, potentia solum commensurabilis, si que etiam rectangulum sub a d, d b, Rationale.

$$\begin{array}{c} b \\ \hline a c, \cancel{3} 3 5 4. & b c, \cancel{3} 3 2 4. \\ a b, \cancel{3} 3 5 4 - \cancel{3} 3 2 4. \end{array}$$

Quoniam b c, Media est, & tantum potentia commensurabilis ipsi a c, erit necessario recta a c, Media, ut constat ex 2. 4. propos. lib. huiss. Quare recta a c, b c, Media sunt inter se tantum potentia commensurabiles:

Cum autem idem excessus sit inter compositum ex rectarum quadratis a c, b c, et compositum ex rectarum quadratis a d, d b, qui inter rectangulum bis sub a c, b c, et rectangulum bis sub a d, d b, ut in precedenti demonstrauimus. Sit autem excessus inter illa rectangula spatium Rationale, cum tamen rectangulum bis sub a c, b c, quam rectangulum bis sub a d, d b, contentum sit Rationale. Quare excessus inter compositum ex rectarum quadratis a c, b c, et compositum ex rectarum quadratis a d, d b, spatium erit Rationale:

Quoniam vero rectae a c, b c, sunt Mediae, et tantum inter se potentia commensurabiles, erunt earum quadrata, Media, et inter se commensurabilia, Compositum quoque ex ipsis quadratis commensurabile, utique quadrato ex a c, b c, descripto, ex 16. propos. lib. huius. Ac proinde et Medium ex corollario Clavi propos. 24. lib. huius.

Non secus demonstrabimus Medium quoque esse compositum ex rectarum quadratis a d, d b.

Medium autem non superat Medium, Rationali, ut vult 27. propos. lib. huius. Quare excessus inter compositum ex rectarum quadratis a c, b c, et compositum ex rectarum quadratis a d, d b, spatium non est Rationale, sed Rationale eum ostendimus. Quod per absurdum. Quare ipsi a b, alia non congruit Media, praeter b c, quae toti sit potentia commensurabilis, et quae cum tota Rationale continet. Igitur Media Apotoma, et c. Quod erat ostendendum.

Theor. 64. Propos. 82.

M E D I A Apotoma secundæ una tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Media Apotoma secunda a b, eique congruens b c, toti a c, potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub a c, b c, Medium. Dico ipsi a b, nullam aliam Medium congruere posse, quæ toti sit etiam commensurabilis potentia, et quæ Medium cum tota continet. Si enim fieri potest, congruat illi alia Media b d, quæ etiam toti a d, sit commensurabilis potentia, et quæ cum tota a d, rectangulum Medium continet.

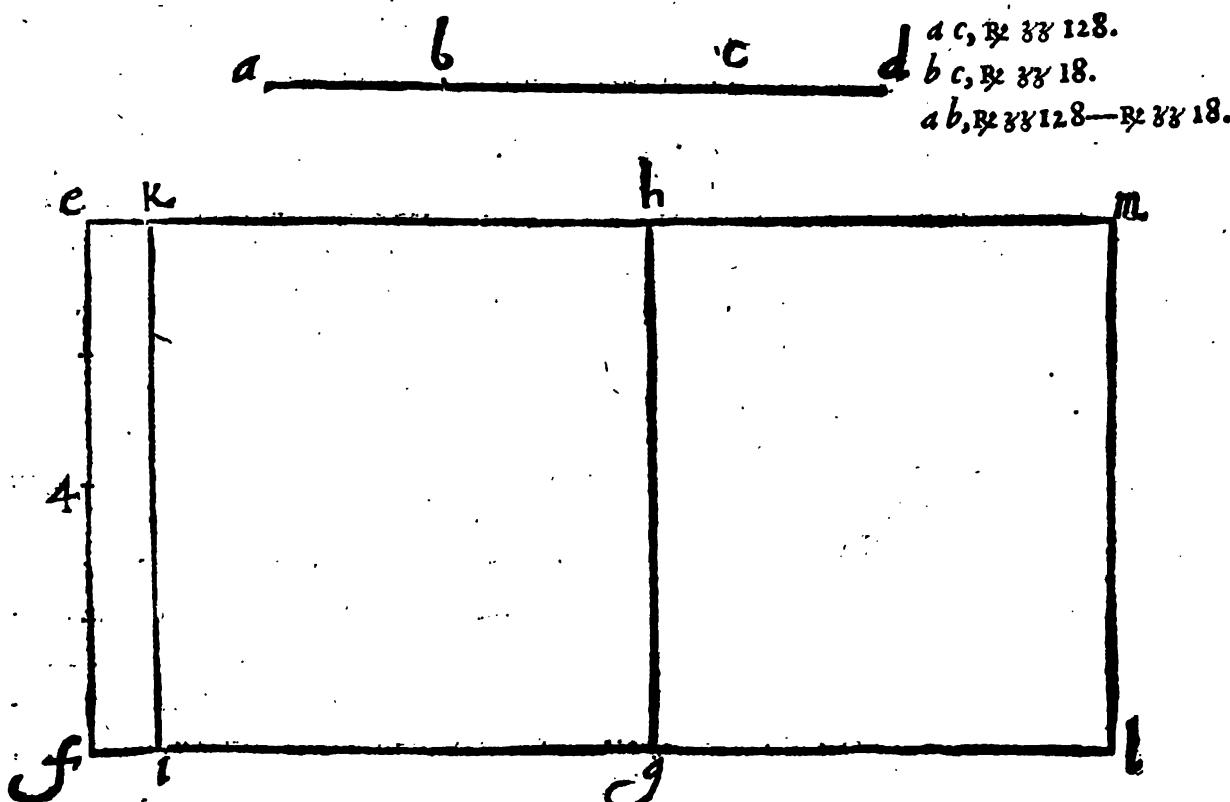
Exponatur deinde Rationalis e f, ad quam applicetur rectangulum e g, aequale composito ex rectarum quadratis a c, b c, et ad eandem Rationalem aliud rectangulum e i applicetur aequale quadrato ex a b: Postremò ad eandem Rationalem e f, aliud rectangulum applicetur aequale composito ex rectarum quadratis a d, d b, nimirum e l.

Igitur cum compositum ex rectarum quadratis a c, b c, aequale sit rectangulo bis sub ipsis contento una cum quadrato ex a b, ut constat ex 7. propos. lib. 2. erit rectangulum k g, aequale rectangulo bis sub a c, b c, comprehenso, eodem modo erit rectangulum k l, aequale rectangulo bis sub a d, d b, contento.

Quoniam vero a c, b c, Mediae sunt, et tantum potentia commensurabiles, erunt earum quadrata, Media, et inter se commensurabilia, compositum quoque ex ipsis quadratis, utique quadrato ex a c, b c, descripto, commensurabile, ut vult 16. propos. lib. huius. et ex corollario Clavi propos. 24. lib. huius, Medium erit. Quare cum rectangulum e g, (aequale composito ex rectarum quadratis a c, b c) applicatum sit ad Rationalem e f, faciet latitudinem e h, Rationalem, sed ipsi Rationali e f, longitudine incommensurabilem, ut constat ex 23. propos. lib. huius.

Rursus cum rectangulum bis sub a c, b c, comprehensum, sit Medium, cum sit commensurabile rectangulo sub a c, b c, contento, ex corollario Clavi propos. 24. lib. huius, sitque ad Rationalem k i, applicatum rectangulum k g, illi aequale, faciet latitudinem k h, Rationalem, sed Rationali k i, longitudine incommensurabilem ex 23. propos. libri huius: Cum autem a c, b, sint Mediae longi-

longitudine inter se incommensurabiles, sicutque ut $a c$, ad $b c$, ita quadratum ex $a c$, ad rectangulum sub illis contentum, ut docet lemma 3. Clavius propos. 19. lib. huius, erit quadratum ex $a c$, rectangulo sub $a c$, $b c$, contento incommensurabile:



Rectangulum $e g$, $\text{Bz} \gamma 242.$

Rectangulum $k g$, $\text{Bz} \gamma 192.$

Rectangulum $e i$, $\text{Bz} \gamma 242 - \text{Bz} \gamma 192.$

Recta $e h$, $\text{Bz} \gamma 15 \frac{1}{4}$

Recta $k h$, $\text{Bz} \gamma 12.$

Recta $e k$, $\text{Bz} \gamma 15 \frac{1}{4} - \text{Bz} \gamma 12.$

Quadrato autem ex $a c$, commensurabile est ostensum compositum ex rectarum quadratis $a c$, $b c$, id est rectangulum $e g$, illi aequale: Et rectangulo sub $a c$, $b c$, contento commensurabile est quoque ostensum, quod bis sub ipsis continetur, videlicet $k g$. Igitur rectangula $e g$, $k g$, incommensurabilia sunt, ut colligitur ex scholio Clavius propos. 14. lib. huius. Recta etiam $e h$, $k h$, eandem rationem habentes cum rectangulis $e g$, $k g$, longitudine erunt incommensurabiles. Sed Rationales ostensa sunt recta $e h$, $k h$. Rationales igitur sunt, et tantum potentia inter se commensurabiles.

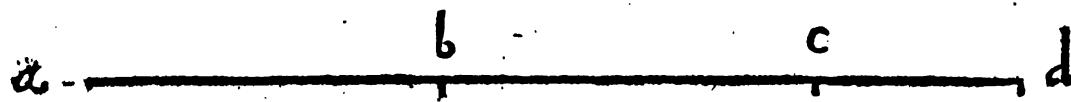
Quare cum à Rationali $e h$, auferatur Rationalis $k h$, ei tantum potentia commensurabilis, erit reliqua $e k$. Apotome et illi congruens $k h$. Non aliter demonstrabimus $e k$, esse Apotomen et illi congruentem $k m$. Igitur Apotome non una tantum linea recta congruit Rationalis potentia tantum commensurabilis existens toti. Quod est absurdum, nam enim tantum congruere propos. 80. demonstramus. Quocirca Media Apotome secunda, et c. Quod erat ostendendum.

Theor. 65. Propos. 83.

Minori vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, et cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

Hh

SIT Minor a b, eique congruens b c, que roti a c, sit incommensurabilis potentia faciens compositum ex ipsarum quadratis, Rationale, quod verò sub ipsis continetur, Medium. Dico ipsi a b, aliam rectam non congruere, præter b c, que etiam roti a c, sit potentia incommensurabilis, & que faciat compositum ex ipsarum quadratis, Rationale, rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium. Si fieri potest sit ipsi a b, alia b d, congruens, que roti a d, sit potentia incommensurabilis, & que faciat, &c.



$$a.c, \text{ & } (18 + \text{ & } 108.)$$

$$b.c, \text{ & } (18 - \text{ & } 108.)$$

$$a.b, \text{ & } (18 + \text{ & } 108) - \text{ & } (18 - \text{ & } 108.)$$

Quoniam igitur in propos. 80. demonstrauimus, eundem esse excessum inter compositum ex rectarum quadratis a c, b c, & compositum ex rectarum quadratis a d, b d, qui inter rectangulum bis sub a c, b c, & rectangulum bis sub a d, b d. Sit autem excessus inter illa composita, spatiuum Rationale, ex scholio Clavi propos. 27. lib. huic, cum tam compositum ex rectarum quadratis a c & b c, quam compositum ex rectarum quadratis a d, b d, Rationale ponatur. Quare excessus inter rectangulum bis sub a c, b c, & rectangulum bis sub a d, b d, spatium erit Rationale: Est autem rectangulum sub a c, b c, ex hypothesi Medium. Igitur rectangulum bis sub a c, b c, erit ei commensurabile, ut vult 16. propos. lib. huic: Quare ex corollario Clavi propos. 24. lib. huic Medium erit. Pari ratione rectangulum bis sub a d, b d, Medium erit.

Medium autem non superat Medium, Rationali, ut constat ex 27. propos. lib. huic: Igitur non erit excessus inter rectangula illa, spatium Rationale. Rationale tamen esse diximus. Quod absurdum. Quare ipsi a b, nulla præter b c, congruet potentia roti incommensurabilis, &c. Minor ergo vna tantum, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 66. Propos. 84.

Ei, que cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

SIT recta a b, cum Rationali Medium totum efficiens, eique congruens sit b c, ipsi a b, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale. Dico ipsi a b, nullam rectam congruere posse, que etiam sit ipsi potentia incommensurabilis, & que faciat compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale.

Si fieri potest sit b d, ipsi a d, congruens potentia roti a d, incommensurabilis, &c.

Igitur cum (ut in propos. 80. lib. huic demonstratum est,) idem sit excessus inter compositum ex rectarum quadratis a c, b c, & compositum ex rectarum quadratis a d, b d, qui inter rectangulum bis sub a c, b c, & rectangulum bis sub a d, b d, comprehensum: Est autem excessus inter rectangula illa, Rationale spatium, ut colligitur ex scholio Clavi propos. 27. lib. huic, cum tam

rectangulum bis sub a c, b c, quām rectangulum bis sub a d, d b, Rationale sit, erit excessus inter composita illa, spatium Rationale.



$$a c, \text{Bz } 38 (216 + \text{Bz } 872.)$$

$$b c, \text{Bz } 38 (216 - \text{Bz } 872.)$$

$$a b, \text{Bz } 38 (216 + \text{Bz } 872.) - \text{Bz } 38 (216 - \text{Bz } 872.)$$

Eft autem ex hypothefi: àm compositum ex rectarum quadratis a c, b c, quām compositum ex rectarum quadratis a d, b d, Medium. At Medium non superat Medium, Rationali, vt conſtat ex 27.lib.huius. Igitur excessus inter composita illa, spatium non est Rationale: Rationale tamē diximus eſſe. Quod absurdum. Non igitur ipſi a b, alia recta congruet, praeſer b c, quæ illi ſit potentia incommensurabilis, & quæ faciat compositum ex ipſarum quadratis a c, b c, Medium, rectangulum verò ſub ipſis contentum, Rationale. Quare ei que cum Rationali Medium totum facit, &c. Quod erat offendendum.

Theor. 67. Propof. 85.

Ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantūm congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens, & compositum ex ipſarum quadratis, Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommensurableque composito ex ipſarum quadratis.

SIT recta a b, cum Medio Medium totum faciens, & illi congruens ſit b c, toti a c, incommensurabilis potentia faciensque compositum ex ipſarum quadratis, Medium, rectangulum etiam ſub ipſis, Medium, & incommensurabile composito ex ipſarum quadratis. Dico ipſi a b, aliam rectam minime congruere poſſe, quæ etiam ſit toti a c, incommensurabilis potentia, & quæ faciat compositum, &c.

Si enim fieri poſteſt ſit recta b d, congruens, & toti a d, incommensurabilis potentia, ita ut compositum ex ipſarum quadratis a d, b d, ſit Medium, & rectangulum ſub ipſis, Medium, & incommensurabile composito ex rectarum quadratis a d, b d.

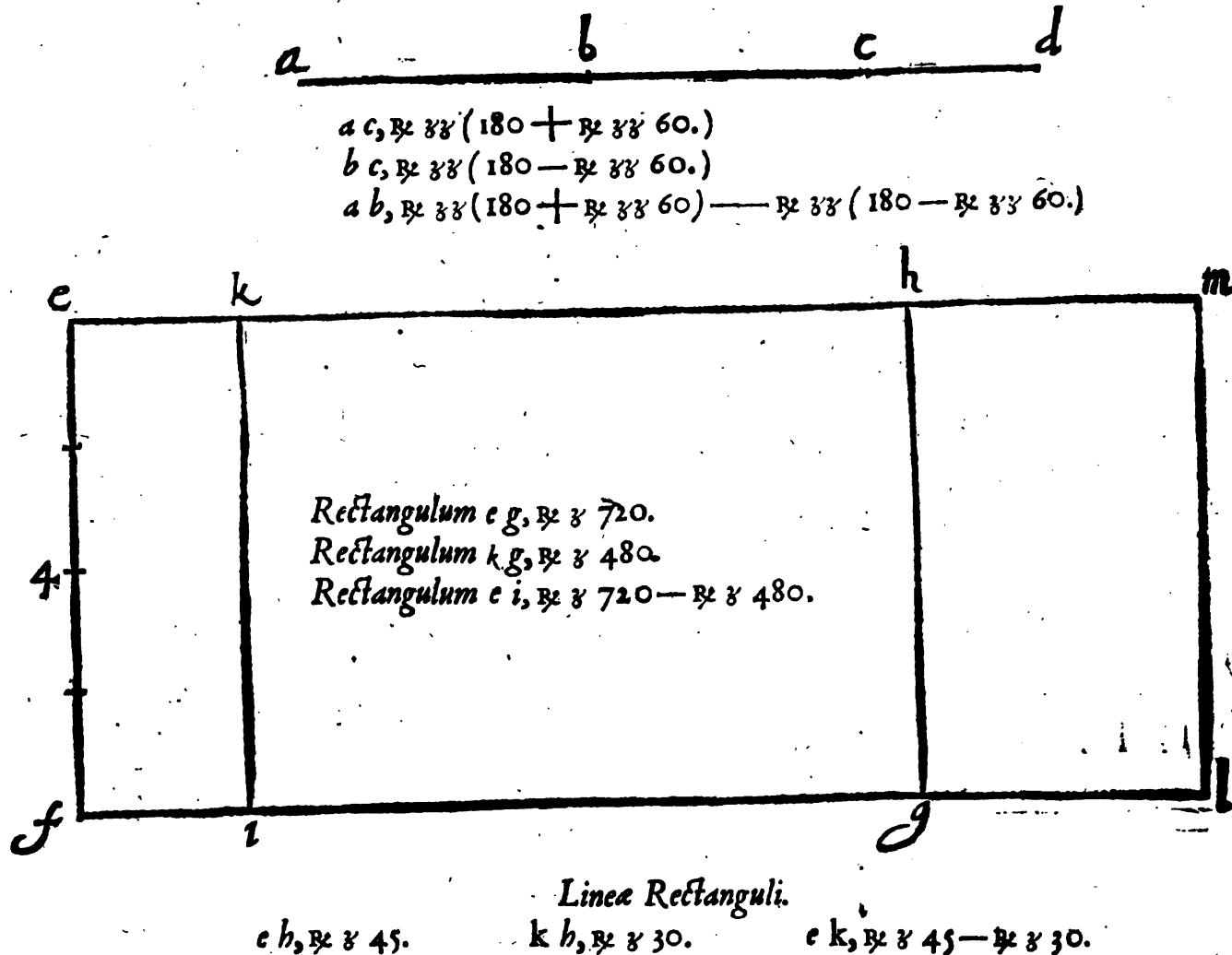
Iſdem enim conſtructis, quæ in propos. 82. Quoniam compositum ex rectarum quadratis a c, b c, Medium eſt, erit rectangulum e. g. illi aequale, Medium. Quare cum Medium e. g. applicatum ſit ad Rationalem e f, faciet latitudinem e h, Rationalem, & ipſi Rationali e f, longitudine incommensurabilem, vt vult 23. propos. lib. huius.

Rursus cum rectangulum ſub a c, b c, Medium ſit, erit & eius duplum ei commensurabile, vt vult 16. propos. lib. huius, ac propterea ex corollario Clauij propos. 24. lib. huius Medium. Igitur Medium erit rectangulum k g, illi aequale.

Medium autem k g, ad Rationalem k i, applicatum latitudinem facit Rationalem, & ei ad quam applicatum eſt longitudine incommensurabilem.

Quare recta k b, Rationalis eſt, & ipſi k i, longitudine incommensurabilis, vt vult 23. propos. lib. huius. Quoniam verò rectangulum k g, commensurabile eſt rectangulo ſub a c, b c, cum ſit illius duplum: ſit autem ex hypothefi rectangulum ſub a c, b c, incommensurabile composito ex

rectarum quadratis a c, b c, erit quoque rectangulum k g, rectangulo e g, quod eidem composito est aquale, incommensurabile, ac proinde recta e h, k h, eandem habentes rationem cum rectangulis e g, k g, incommensurabiles sunt, ut constat ex 10. propos. lib. huins.



Iam verò Rationales ostendae sunt e h, k h, Igitur Rationales sunt, & tantum potentia inter se commensurabiles. Si igitur à Rationali e h, Rationalis k h, auferatur, que potentia tantum sit commensurabilis ipsi e h, erit reliqua e k, Apotome, & illi congruens k h.

Non secus demonstrabimus e k, Apotomen esse, eique congruentem k m, Igitur Apotome non una tantum congruit recta linea, &c. Quod absurdum, vnam enim solum congruere posse demonstrauimus, propositione 80. lib. huins. Ei, igitur, que cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

DEFINITIONES TERTIAE.



X P O S I T A Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quam congruens, quadrato, rectæ linea sibi longitudine commensurabilis.

I.

Si quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis. Vocetur Apotome prima.

II.

Si r̄erò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis. Vocetur Apotome secunda.

III.

Quod si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis. Vocetur Apotome tertia.

Rutus si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ linea sibi longitudine incommensurabilis.

IV.

Si quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis. Vocetur Apotome quarta.

V.

Si r̄erò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis. Vocetur Apotome quinta.

VI.

Quod si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis. Vocetur Apotome sexta.

SCHOOLM. EX. CLAKI. 1712. 11

NON plater colligere in unius barum ferat Apotomen, ut superior numerus seu binorum ex binis nominibus suis collectus. Sunt enim sex haec Apotome, rectæ lineæ, que relinquuntur post detractiōnē nominum, nominum ex nominibus nominum, sex linearum, que ex binis nominibus dicuntur, ut ex definitionib⁹ est perspicuum.

Probl. 19. Propos. 86

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis a b, & c b, id est 9. & 4. per ea, que Clavius docuit in scholio 2. propos. 29. lib. huius, quorum excessus non sit quadratus id est 5. Ita vi 9. & 4. habeant inter se rationem numerorum quadratorum: At 9. & 5. non habeant inter se eandem proportionem. Deinde exposita Rationali quæpiam d, sumatur alia quæ sit ei longitudine commensurabilis nimis. Erit igitur f, cum sit commensurabilis Rationali d, expositæ, Rationalis.

Exposita Rationali quæpiam d, sumatur alia quæ sit ei longitudine commensurabilis nimis. Erit igitur f, cum sit commensurabilis Rationali d, expositæ, Rationalis.

Fiat deinde ut numerus $a b$, id est 9, ad numerum $a c$, id est 5, ita per corollarium Clavi proposit. 6. huius libri quadratum ex $e f$, ad quadratum ex $g f$, Dico e g, esse primam Apotomen.

Quoniam enim quadrata ex $e f$, $g f$, eandem habent proportionem quam numeri $a b$, $a c$, id est 9. & 5. commensurabilia sunt, ut vult 6. propos. lib. huius, erunt rectae $e f$, $g f$, saltem inter se potentia commensurabiles: Quare cum recta $e f$, sit ostensa Rationalis, erit et $g f$, Rationalis:

Cum autem numeri $a b$, $a c$, id est 9. & 5. non habeant rationem, quam numeri quadrati habebunt etiam quadrata ex $e f$, $g f$, rationem quadratorum numerorum, ac proinde ex 9. propos. lib. huius, longitudine erunt incommensurabiles rectae $e f$, $g f$. Iam vero Rationales sunt demonstratae. Rationales igitur sunt, et solum potentia inter se commensurabiles: Quare reliqua e g, Apotome est. Dico et primam esse.

Possit enim recta $e f$, plus, quam recta $g f$, quadrato rectae h , Igitur cum sit ut numerus $a b$, id est 9, ad numerum 5. Ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex $g f$, erit per conuersionem ratio-
ni ut $a b$, ad $c b$, id est 9, ad 4. ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex h , habent autem numeri illi rationem, quam numerus quadratus habet ad numerum quadratum: Igitur quadrata ex $e f$, & h , eandem rationem habebunt inter se, ac properea et rectae, $e f$, & h , longitudine inter se sunt commensurabiles, ut vult 9. propos. lib. huius.

Igitur cum tota e f, plus possit, quam congruens $g f$, quadrato rectae h , sibi longitudine com-
mensurabilis, sitque tota e f, Rationali exposita longitudine commensurabilis, erit a g, ex defini-
tione prima tertiarum definitionum Apotome prima. Invenia est ergo Apotome prima. Quid
erat faciendum.

Probl. 20. Propos. 87.

INVENIRE secundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis $a b$, $c b$, ut in propositione precedenti. Exponatur Rationalis d, cui alia sumatur longitudine commensurabilis nimisrum $g f$, Erit igitur $g f$, Rationali d, commensurabilis, Rationalis.

Fiat deinde ut numerus $a c$, ad numerum $a b$, id est ut 5, ad 9, ita quadratum ex $g f$, ad qua-
dratum ex $e f$, per corollarium propos. 6. lib. huius, à Clavi traditum, Dico e g, esse Apotomen
secundam.

$a \dots c \dots b$

$e f$, Bl 8 45.

d

4

$g f$, Bl 8 45 - 5.

e

9

f

g

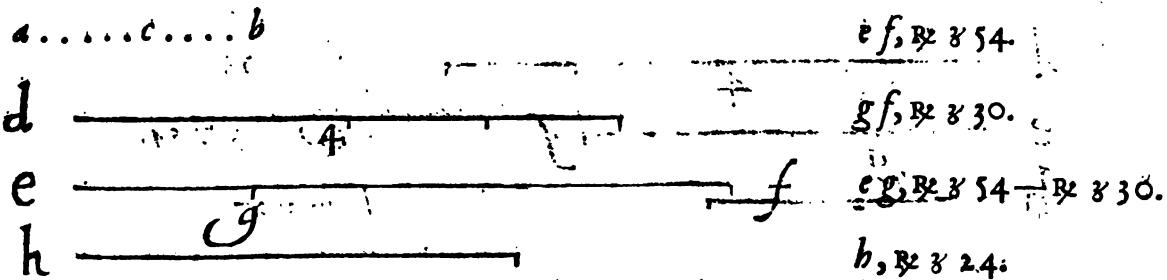
Quoniam enim quadrata ex $g f$, & $e f$, eandem habent inter se rationem, quam numeri $a c$, $a b$, id est 5. & 9, erunt quadrata illa inter se commensurabilia, ut patet ex 6. propos. lib. huius, ac proinde et recta $g f$, & $e f$, saltem commensurabiles potentia. Quare cum $g f$, sit Rationalis ostensa, erit et $e f$, Rationalis. Cum vero numeri $a c$, $a b$, non habeant Rationem numerorum quadratorum, nec etiam quadrata ex $g f$, & $e f$, erunt rectae $g f$, & $e f$, longitudine incom-
mensurabiles, ut vult 9. propos. lib. huius: Rationales tamen ostensa sunt rectae $g f$, & $e f$, Rationalis igitur sunt, et tantum potentia commensurabiles. Quare e g, reliqua Apotome est. Dico et se-
cundam esse.

Posit enim $e f$, plus, quam $g f$, quadrato ex h . Igitur cum sit vi numerus a c, id est 5. ad numerum a b, id est 9. Ita quadratum ex $g f$, ad quadratum ex $e f$, et permutando, ut a b, id est 9. ad a c, id est 5. ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex $g f$. Igitur demonstrabimus ut in antecedenti propositione esse per conversionem Rationis ut a b, ad c b, id est 9. ad 4. ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex h , habent autem numeri illi rationem numerorum quadratorum: quare re-
Etè concludemus cum propos. 9. lib. huius rectam h , ipsi $e f$, longitudine commensurabilem esse. Quocirca cum tota $e f$, plus poscit, quam congruens $g f$, quadrato rectae h , sibi longitudine com-
mensurabilis, sitque congruens $g f$. Rationali expositae d, longitudine commensurabilis, erit $e g$, ex
definitione secunda Apotome. Invenia est ergo Apotome secunda. Quod erat faciendum.

Probl. 21. Propos. 88.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis, ut in propos. 86. scilicet 9. et 4. Sumatur alius numerus i, id est 6. ut in propositione 51. lib. huius diximus, qui neque ad a b, id est 9. neque ad a c, id est 5. habeat rationem, quam numerus quadratus habet ad quadratum numerum. Exponatur deinde Rationalis d, et fiat ut numerus i, id est 6. ad numerum a b, id est 9. Ita quadratum ex d, Rationali ad quadratum ex $e f$. Illudque agatur ut docet corollarium Clavius propos. 6. lib. huius. Etunc igitur quadrata ex d, et $e f$, eandem rationem inter se habentia, quam numeri i, et a b, id est 6. et 9. commensurabilia, ut vult 6. propos. lib. huius, rectae quoque d, et $e f$, saltē commensa-
rables potentia.



Existence ergo d, Rationali, et $e f$, et i , commensurabilis, Rationalis. Quoniam vero numeri i, et a b, id est 6. et 9. nec etiam quadrata ex $e f$, et f , rationem habet numerorum quadratorum, erunt rectae propos. 9. lib. huius rectae d, et $e f$, longitudine inter se incomensurabiles.

Rursus fiat ut a b, ad a c, id est ut 9. ad 5. ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex $g f$, illudque fiat ut docet corollarium Clavius propos. 6. lib. huius. Dico d gesse Apotomen. Nam cum quadrata ex $e f$, et $g f$, habeant inter se eandem rationem, quam numeri a b, et a c, id est, quam 9. et 5. sint commensurabiles, erunt rectae $e f$, et $g f$, saltē inter se commensurabiles potentia. Quia-
re cum $e f$, sit Rationalis ostensa, erit $e g f$, et $e f$, commensurabilis, Rationalis:

Quoniam vero numeri a b, et a c, id est 9. et 5. nec etiam quadrata ex $e f$, et $g f$, habeant ratio-
nem, quam numeri quadrati habent, erunt rectae $e f$, et $g f$, longitudine incomensurabiles, ut vult
9. propos. lib. huius: Iam vero Rationales sunt demonstratae $e f$, et $g f$; Rationales igitur sunt, et
tantum commensurabiles potentia. Quare cum ex $e f$, auferatur $g f$, tamen potentia com-
mensurabilis, erit reliqua $e g$. Apotome, ut constat ex 74. propos. lib. huius. Dico etiā tertiam ef-
se. Quoniam enim est, ut i, ad a b, id est ut 6. ad 9. ita quadratum ex d, ad quadratum ex $e f$, et
ut a b, ad a c, id est ut 9. ad 5. ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex $g f$, erit ex aequo, ut i, ad

$a:f$, id est $v t 6$. ad 5 . ita quadratum ex d , ad quadratum $g:f$. Sed numeri i , & $a:c$, id est 6 . & 5 . non habent rationem, quam numeri quadrati habent. Quare nec quadrata ex d , & $g:f$, habebunt rationem numerorum quadratorum. Quare d , & $g:f$, sunt inter se incommensurabiles longitudine, ex 9 . propos. lib. huius ac proinde neutra ipsarum $e:f$, $g:f$. Rationali d , exposita longitudine est commensurabilis.

Iam vero recta $e:f$, plus possit, quam $g:f$, quadrato rectae h , demonstrabimus igitur ut in propos. 86. rectam h , ipsi $e:f$, esse longitudine incommensurabilem, ac properea cum tota $e:f$, plus possit, quam congruens $g:f$, quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum Rationali d , exposita longitudine commensurabilis existat, erit ex definitione reliqua $e:g$. Apotome tertia. Inuenimus igitur tertiam Apotomen. Quod erat faciendum.

Probl. 22. Propos. 89.

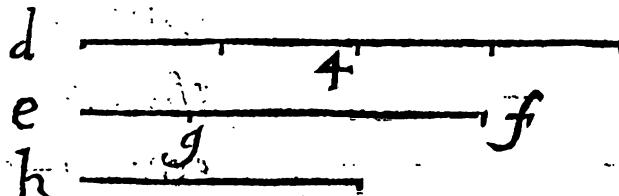
IN V E N I R E quartam Apotomen.

INVENTIS duobus numeris non quadratis $a:c$, $c:b$, id est 6 . & 3 . ita ut compositus ex illis $a:b$, id est 9 . ad neutrum ipsorum habeat rationem, quam numerus quadratus habet ad numerum quadratum, ut docuit Clavius in scholio 3. propos. 29. lib. huius.

Exponatur deinde Rationalis quepiam d , cui alta sumatur longitudine commensurabilis, sique $e:f$, erit igitur $e:f$. Rationalis, & reliqua construatur, ut in propos. 86. Demonstrabimus ut ibi, rectam $e:g$, esse Apotomen. Dico ergo quartam esse.

$a \dots \dots c \dots \dots b$

$e:f, 9.$



$g:f, Bz 8 54.$

$e:g, 9 - Bz 8 54.$

$h, Bz 8 27.$

Possit enim $e:f$, plus quam $g:f$, quadrato rectae h . Quoniam igitur est $v t a:b$, ad $a:c$, id est $v t 9$. ad 6 . ita quadratum ex $e:f$, ad quadratum ex $g:f$, erit per conuersationem rationis, ut numerus $a:b$, id est 9 . ad numerum $c:b$, id est 3 : ita quadratum ex $e:f$, ad quadratum ex $g:f$. Quare cum numeri $a:b$, $c:b$, id est 9 . & 3 . non habent rationem, quam quadrati numeri, habent inter se, nec etiam quadrata ex $e:f$, & $g:f$, erunt ex 9 . definitione lib. huius recta $e:f$, & h , longitudine incommensurabiles.

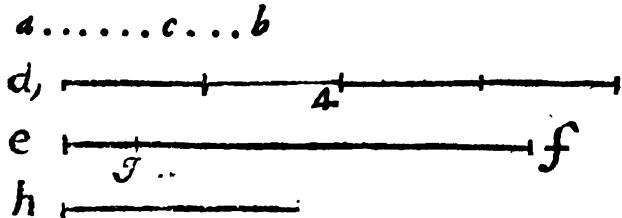
Quoniam vero $e:f$, plus potest, quam illi congruens $g:f$, quadrato rectae h , longitudine incommensurabilis, sique $g:f$. Rationali d , exposita longitudine commensurabilis, erit ex definitione reliqua $e:g$, Apotome quarta. Invenia est ergo Apotome quartu. Quod erat faciendum.

Probl. 23. Propos. 90.

IN V E N I R E quintam Apotomen.

INVENTIS (repetita figura antecedentis propos.) duobus numeris non quadratis $a:c$, $c:b$, id est 6 . & 3 . fiat constructio ut in propos. 87. hoc est sumatur $g:f$. Rationali exposita d , longitudine commensurabilis, ostendemus igitur ut ibi rectam $e:g$, Apotomen esse. Dico ergo quintam esse.

effe. Posit enim $e f$, plus, quam $g f$, quadrato rectæ h .



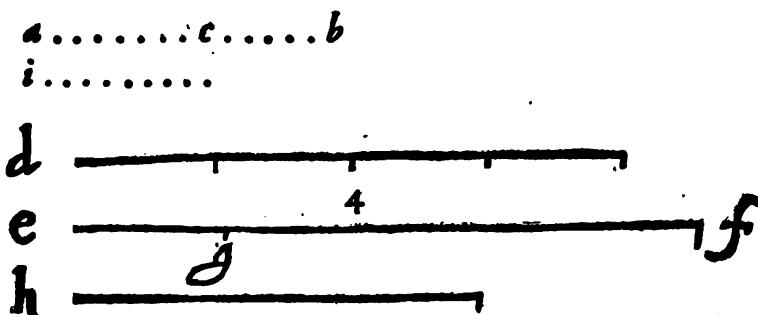
$e f, \text{Bz} \gamma 54.$
 $g f, 6 \text{ Vel } \text{Bz} \gamma 36.$
 $e g, \text{Bz} \gamma 54 - 6.$
 $h, \text{Bz} \gamma 18.$

Igitur ut in 87. propos. demonstrabimus per conuerzionem rationis esse viri numerus $a b$, id est 9. ad numerum $c b$, id est 3. ita quadratum ex $e f$, ad quadratum ex h , eruntque ut in antecedenti proposit. rectæ $e f$, & h , longitudine inter se incommensurabiles. Quare cum congruens $g f$, Rationali d , exposita longitudine sit commensurabilis, erit ex definitione $e g$, Apotome quinta. Inuenta est ergo Apotome quinta. Quod erat faciendum.

Probl. 24. Propos. 91.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris $a c, c b, \text{et } i$, id est 7. 5. & 9. ut in propos. 54. ita ut $a b$, id est 12. ad neutrum ipsorum nimirum ad $a c, c b$, id est 7. & 5. habeat rationem numeri quadrati ad numerum quadratum.



$e f, \text{Bz} \gamma 108.$
 $g f, \text{Bz} \gamma 63.$
 $h, \text{Bz} \gamma 45.$
 $e g, \text{Bz} \gamma 108 - \text{Bz} \gamma 63.$

Deinde exposita Rationali d , reliqua fiant ut in propos. 88. ostendemus igitur pari medio, quo ibi vñsumus, rectas d , & $e f$, esse inter se longitudine incommensurabiles, & rectam $e g$, esse Apotomen. Dico & sextam esse, Erunt enim ut in propos. 88. rectæ d , & $g f$, longitudine incommensurabiles, Atque adeo neutra illarum $e f, g f$, Rationali d , exposita longitudine commensurabilis existit. Iam verò $e f$, plus possit, quam $g f$, illi congruens quadrato rectæ h . Igitur demonstrabimus pari medio, quo vñsumus propos. 89. rectam h , longitudine incommensurabilem esse rectæ $e f$. Quare cum tota $e f$, plus possit, quam congruens $g f$, quadrato rectæ h , fibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum Rationali d , exposita longitudine commensurabilis existat, erit recta $e g$, ex definitione Apotome sexta. Inuenta est ergo Apotome sexta. Quod erat faciendum.

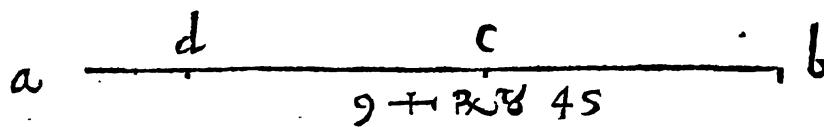
S C H O L I V M E X C L A V I O.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus bac ratione, ut Theon docet hoc loco.

Sit inuenienda exempli gratia, prima Apotome. Reperiatur prius ex binis nominibus prima $a b$, cuius maius nominē a , & mi- 49. de-
nominus b . Abscissa igitur ex $a c$, recta $c d$, que equalis sit ipsi $c b$: Dico $a d$, esse primam Apotomen. Quoniam enim $a c, c b, R, a$ cimi.
tionales sunt potentia tantum commensurabiles, erunt etiam $a c, d c$, Rationales potentias tantum commensurabiles. Est ergo $a d$, 74. de-
Apotome. Et quia $a c$, plus potest, quam $c b$, hoc est quam $d c$, quadrato rectæ linea fibi longitudine commensurabilis: & est $a c$, cimi.
Rationales exposita longitudine commensurabilis, ex definitione cipi, que ex binis nominibus prima dicuntur, erit ex definitione

Kk

Apotoma prima a d, prima Apotome. Eadem ratione ex ceteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inuenie-

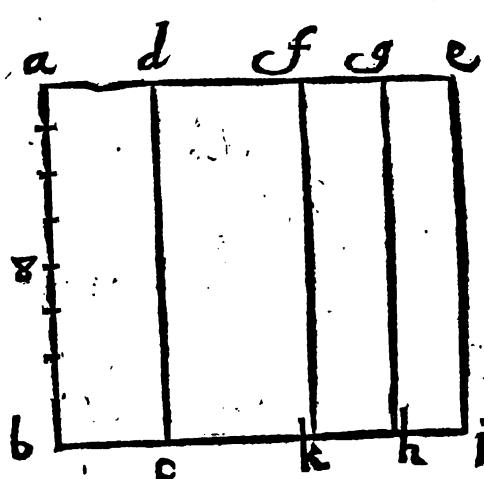


mus, ut ex secunda secundam, ex tercia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextam, si minora nomina ex majoribus auferamus.

Theor. 68. Propos. 92.

S i spatum contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatum potens, Apotome est.

CONTINEATVR spatum a c, sub Rationali a b, & Apotoma prima a d. Dico rectam lineam, quæ spatum a c, posset esse Apotomen. Sit recta d e, linea, quæ congruit ipsi Apotome a d, erunt ergo a e, & d e, ex definitione Apotomæ primæ Rationales, & inter se tantum potentia commensurabiles, & tota a e, Rationali expositæ longitudine erit commensurabilis, & denique a e, plus poterit, quam d e, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.



Lineæ primæ figure.

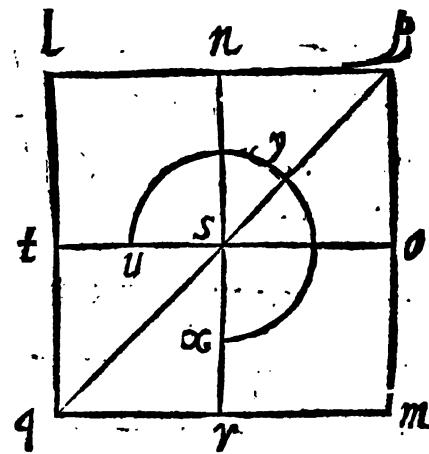
- a e, 9.
- a d, 9 + 3x8 45.
- d e, 3x8 45.
- a g, 7 $\frac{1}{2}$.
- g e, 1 $\frac{1}{2}$.
- d f, 3x8 11 $\frac{1}{4}$

Rectangula.

- a i, 72.
- a h, 60.
- g i, 12.
- d k, 3x8 720.
- a c, 72 + 3x8 2880.
- Rectangulum sub a g, g e, II $\frac{1}{4}$

Lineæ secundæ figure.

- t o, 3x8 60.
- t o, 3x8 12.
- t s, 3x8 60 + 3x8 12.
- Quadrata.
- l m, 60.
- n o, 12.



Secetur d e, bifarium in f, & quadrato ex f e, hoc est, quartæ parti quadrati ex d e, applicetur ad a e, rectangulum æquale, sitque quod sub rectis a g, g e, continetur. Igitur cum a e, plus posset, quam d e, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, erunt ex 18. propos. lib. huius rectæ a g, g e, commensurabiles longitudine, ac proinde ex 16. propos. lib. huius, tam a g, quam g e, ipsi a e, longitudine erit commensurabilis sed a e, rationali a b, expositæ est commensurabilis longitudine. Quare rectæ a g, g e, Rationali a b, longitudine erunt etiam commensurabiles, ut vult 12.

propos. lib. huius. Ac propterea ex 6. definitione lib. huius, Rationales erunt a g, g e, Igitur si rectæ g h, & e i, ducantur, quæ ipsi Rationali a b, sint parallela, erit verumque rectangulum a b, & g i, Rationale, ut constat ex 20. propos. lib. huius.

Rursus cum rectæ d f, f e, longitudine sint commensurabiles ipsi d e, sitque eadem d e, Rationali a b, incommensurabilis longitudine (Si enim essent a b, & d e, inter se longitudine commensurabiles, cum a e, Rationali a b, expositæ longitudine sit commensurabilis, essent etiam a e, d e, commensurabiles longitudine. Quod esset absurdum, ponatur enim non esse, sed tantum potentia commensurabiles) erit etiam tam d f, quam f e, Rationali a b, longitudine incommensurabilis: Quoniam verò rectæ d f, f e, Rationali d e, sunt commensurabiles ostensa, erunt rectæ d f, f e, Rationales: Igitur ducta f k, ipsi a b, parallela, erunt rectangula d k, f i, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contenta, Media, ut vult 22. propos. lib. huius.

Iam verò ipsi rectangulo a b, æquale describatur quadratum l m, & rectangulo g i, aliud quadratum describatur illi æquale n o, habens angulum communem l p m, cum quadrato l m, erunt igitur quadrata l m, n o, circa eandem diametrum p q. Deinde compleatur figura ut vides.

Igitur cum rectangulum sub a g, g e, Rationalibus longitudine commensurabilibus, æquale sit quadrato e f, erunt tres rectæ a g, f e, g e, continuè proportionales, ut vult 17. propos. lib. 6. Rectangula etiam a h, f i, g i, eandem cum ipsis rationem habentia ex f. propofit. lib. 6. erunt proportionalia, & proinde f i, Medium proportionale inter a h, g i, hoc est, inter quadrata l m, n o, illis æqualia. Sed per lemma Clauij propos. 14. lib. huius, rectangulum l o, Medium est etiam proportionale inter quadrata l m, n o, Quare rectangula f i, & l o, sunt inter se æqualia, ipsi autem rectangulo f i, æquale est rectangulum d k, & rectangulo l o, æquale est etiam rectangulum n m, ex 36. propos. lib. 1. Quare totum rectangulum d i, toti gnomoni u, y x, cum quadrato n o, est æquale. Est etiam ex constructione rectangulum a i, æquale quadratis l m, n o. Quare reliquum a c, reliquo quadrato t r, est æquale: Ac proinde rectæ t s, potest spatium a c, contentum sub Rationali a b, & Apotome prima a d. Dico & Apotomen esse t s, Nam cum a b, g i, sint Rationalia ostensa, sitque quadrata l m, n o, illis æqualia, erunt igitur quadrata illa Rationalia, & rectæ t o, s o, Rationales.

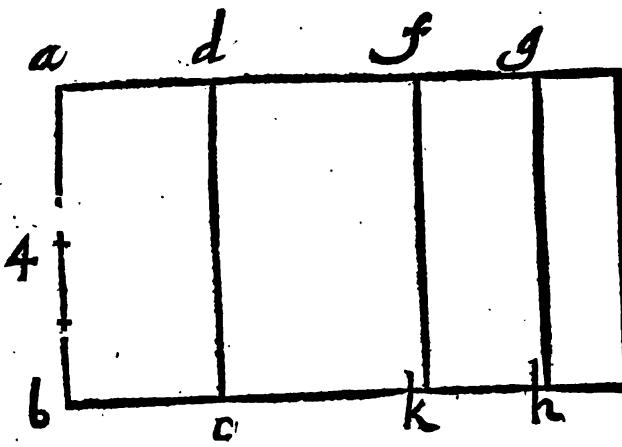
Rursus cum rectangulum f i, Medium sit demonstratum, erit & illi æquale rectangulum l o, Medium, idcirco rectangulum l o, & quadratum n o, incommensurabilia erunt, cum vnum sit Rationale, alterum verò Medium: Igitur rectæ t o, s o, eandem cum illis rationem habentes, ex 1. sexti, erunt longitudine incommensurabiles, ex 10. propos. lib. huius. Aferens igitur à Rationali, & c. erit reliqua t s, Apotome, ut vult 74. propos. lib. huius. Igitur si spatium continetur sub Rationali, & c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 69. Propos. 93.

Si spatium continetur sub Rationali, & Apotoma secunda; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

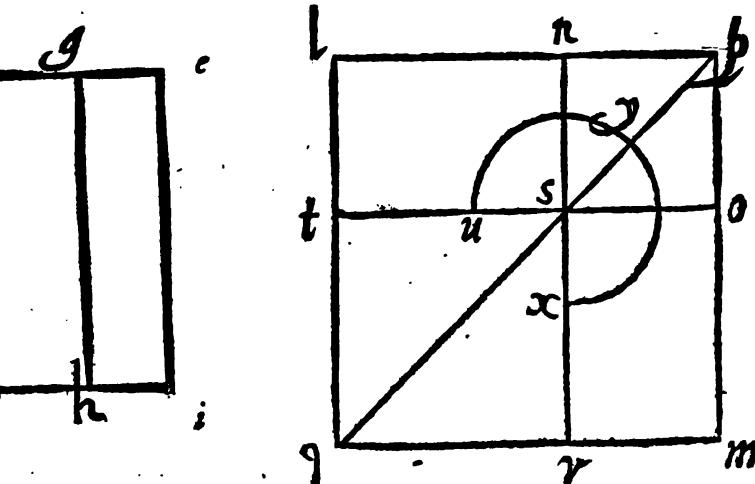
CONTINEATVR spatium a c, sub Rationali a b, & Apotoma secunda a d, Dico rectam, quæ potest spatium a c, Media Apotomen esse primam. Congruat ipsi a d, recta d e, erunt igitur rectæ a e, d e, Rationales, & tantum potentia commensurabiles, & d e, longitudine erit commensurabilis Rationali a b, & denique a e, plus poterit, quam d e, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, ut constat ex definitione Apotome secundæ.

Secetur congruens d e, bifariam in puncto f, & reliqua fiant ut in antecedenti propositione, erunt igitur ex 18. propos. lib. huius, rectæ a g, g e, longitudine inter se commensurabiles, ut demonstrauimus propositione precedenti, ac proinde tam a g, quam g e, Rationali a e, longitudine commensurabilis. Est autem a e, Rationali a b, expositæ incommensurabilis longitudine (nam



Lineæ.

a e, $\frac{3}{2}$ & 45.
d e, 5.
a d, $\frac{3}{2}$ & 45 - 5.
a g, $\frac{3}{2}$ & 31 $\frac{1}{4}$.
g e, $\frac{3}{2}$ & 1 $\frac{1}{4}$.
d f, $\frac{3}{2}$ & 6 $\frac{1}{4}$.



Rectangula.

Rectangulum sub a g, g e, 6 $\frac{1}{4}$
a c, $\frac{3}{2}$ & 720 - $\frac{3}{2}$ & 20.
d k, $\frac{3}{2}$ & 100. vel 10.
a h, $\frac{3}{2}$ & 500.
g i, $\frac{3}{2}$ & 20.
a i, $\frac{3}{2}$ & 720.
f b, 10 - $\frac{3}{2}$ & 20.

Lineæ Quadratorum.

t o, $\frac{3}{2}$ & 500.
f o, $\frac{3}{2}$ & 20.
t s, $\frac{3}{2}$ & 500 - $\frac{3}{2}$ & 20.
Quadrata.
l m, $\frac{3}{2}$ & 500.
n o, $\frac{3}{2}$ & 20.
t r, $\frac{3}{2}$ & 720 - $\frac{3}{2}$ & 20.

si a e, ipsi a b, longitudine commensurabilis esset, cum recta d e, ipsi a b, ponatur commensurabilis longitudine, essent et a e, d e, longitudine quoque commensurabiles, quod esset contra hypothesin, ponuntur enim tantum potentia commensurabiles). Quare tam a g, quam g e, Rationali a b, longitudine est incommensurabilis.

Iam vero tam a g, quam g e, Rationali a e, longitudine est ostensa commensurabilis, Igitur Rationales sunt a g, g e, & tam a b, a g, quam a b, g e, Rationales sunt, sed tantum potentia inter se commensurabiles, Ac propterea rectangula a b, & g i, sub Rationalibus tantum potentia commensurabilibus contenta, Media sunt, ut vult 22. propos. lib. huius.

Rursus d e, secta sit bifariam in f, erunt d f, f e, ipsi d e, longitudine commensurabiles. Quarecum d e, Rationali a b, longitudine sit commensurabilis ex hypothesi, erunt ipsi a b, commensurabiles longitudine rectæ d f, f e, ac proinde et Rationales. Quare rectangula d k, f i, sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contenta, Rationalia erunt, ut constat ex 20. propos. lib. huius.

Facile igitur colligitur, ut in antecedenti propos. rectam t s, posse spatium a c, sub Rationali a b, & Apotome secunda a d, contentum. Dico t s, Media Apotomen esse primam. Nam cum a g, g e, inter se sint commensurabiles longitudine, erunt rectangula a h, g i, eandem cum illis rationem habentia, commensurabilia, ut constat ex 10. propos. lib. huius, ac proinde et quadrata l m, n o, que illis sunt aequalia ex constructione erunt inter se commensurabilia. Quare linea quadratorum l m, n o, saltet erunt potentia commensurabiles. Sunt autem linea illæ Media, cum possint

possint spacta Media, nimirum rectangulum a b, & rectangulum g i, qua Media esse demon-
strauiimus.

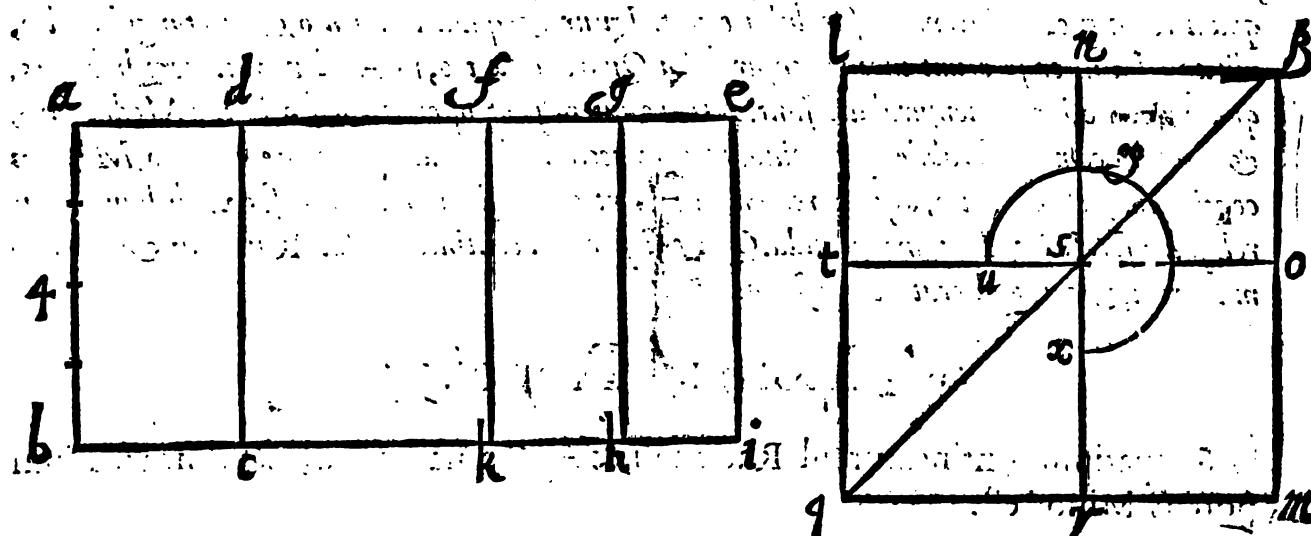
Quoniam vero rectangulum f i, ac sibi aequali t o, Rationalia sunt erunt rectangula illa:
quadrato Rationali n o, incommensurablia. Quare recto t o, sibi a, eandem cum illis Rationes
habentes longitudine sunt incommensurabiles, ex 10. propos. lib. huius. Cum igitur s o, s o,
Mediae sint ostensa, & commensurabiles erunt r o, s o, Mediae, & ratiocina potentia commensu-
rabiles, quae cum continuo rectangulum sub ipsis nimirum l o, Rationale, erit i reliqua Me-
dia Apotome prima. Igitur si spatium continetur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c.
Quod erat ostendendum.

Theor. 70. Propos. 94.

Si spatium continetur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium,
potens, Media est Apotome secunda.

CONTINEATVR spatium a c, sub Rationali a b, & Apotoma tertia a d, Dico
rectam, qua spatium a c, potest esse Media Apotomen secundam.

Congruat ipsi a d, recta b c, erunt igitur a e, d e, Rationales, & ratiocina potentia inter se
commensurabiles, & neutra ipsarum a e, d e, Rationali a b, expositae longitudine erit commen-
surabilis, & denique a e, plus poterit, quam d e, quadrato rectae sibi commensurabilis longitu-
dine.



Linea.

Rectangula.

Linea quadratorum.

a e, Bz 8 54.

Rectangulum sub a g, g e, 7 1/2.

s o, Bz 8 8 600.

d e, Bz 8 30.

a i, Bz 8 864.

n p, Bz 8 8 24.

a g, Bz 8 37 1/2.

d k, Bz 8 120.

t f, Bz 8 8 600 - Bz 8 8 24.

g e, Bz 8 1 1/2.

a h, Bz 8 600.

Quadrata.

a d, Bz 8 54 - Bz 8 30.

g i, Bz 8 24.

l m, Bz 8 600.

d f, Bz 8 7 1/2.

a c, Bz 8 864 - Bz 8 480.

n o, Bz 8 24.

t r, Bz 8 864 - Bz 8 480.

Secta sit d e, bifurcam in punto f, & reliqua construantur, ut in propos. 92. erunt igitur ut

ibi a g, g e, longitudine commensurabiles, ut vult 18. propos. lib. huius, ac proinde tam a g, quam g e, Rationali a e, longitudine commensurabilis. Est autem a e, Rationali a b, incommensurabilis longitudine ex hypothesi. Quare cum tam a g, quam g e, Rationali a e, sit ostensa commensurabiles. Igitur rectangula a. b, g i, contenta sub Rationalibus tantum potentia inter se commensurabilibus, Media sunt, ut vult 22. propos. lib. huius.

Rursus cum congruent d e, longitudine sit, incommensurabilis Rationali a b, exposita ex hypothesi, erunt quoque rectae d f, f e, que ipsi d e, longitudine sunt commensurabiles, ipsi a b, longitudine incommensurabiles, quare tam a b, d f, quam a b, f e, Rationales sunt, et sicutum potentia commensurabiles, ac proinde rectangula d k, f i, sub Rationalibus potenter, solum commensurabilibus contenta, Media, ut vult 22. propos. lib. huius.

Facilius nunc demonstrabitur, vt in antecedenti propositione rectam t s, posse spatium a c, contentum sub Rationali a b, et Apotoma secunda a d, Dico t s, esse Media Apotomen secundam. Nam cum rectangula a b, g i, Media sint ostensa, erant quadrata l m, n o, illis aequalia, Media; rectae quoque t o, s o, potentes spatio Media, Media erunt. Cum autem rectangula a b, g i, eandem rationem habeant, quam rectae a g, g e, ex 1. sexti. Sunt autem rectae a g, g e, commensurabiles ostensa, erunt et rectangula a b, g i, inter se commensurabiles, ac propere, et quadrata l m, n o, illis aequalia, commensurabilia erunt, rectae quoque t o, s o, sicutem potentia commensurabiles. Quia vero rectae a e, d e, sunt tantum potentia inter se commensurabiles, sitque g e, ostensa commensurabilis longitudine Rationali a e, sed Rationali d e, longitudine est commensurabilis ipsius dimidia f e, erunt ex scholio Clavius propos. 14. lib. huius rectae g e, f e, longitudine incommensurabiles, ac propere rectangula g i, f i, eandem habentia rationem, quam rectae g e, f e, incommensurabilia erunt. Igitur et quadratum n o, et rectangulum l o, illis aequalia inter se erunt incommensurabilia. Quare rectae t o, s o, eandem rationem habentes, quam l o, n o, incommensurabiles sunt. Media autem sunt ostensa t o, s o. Igitur Media sunt, et tantum commensurabiles potentia, que cum rectangulum sub ipsis contentum l o, Medium contineant, (est enim l o, aequale rectangulo f i, ut demonstrauimus propos. 92. lib. huius) erit reliqua t s, Media Apotome secunda. Quare si spatium continetur sub Rationali et Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 71. Propos. 95.

Si spatium continetur sub Rationali, et Apotoma quarta; recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATVR spatium a c, sub Rationali a b, et Apotoma quarta a d, Dico rectam, quae spatium a c, potest esse Minorem.

Congruat ipsi a d, recta d e, erunt igitur a e, d e, Rationales, et potentia solum commensurabiles, et a e, Rationali a b, exposita longitudine erit commensurabilis, et denique a e, plus poterit, quam d e, quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, ut constat ex definitione Apotoma quartae.

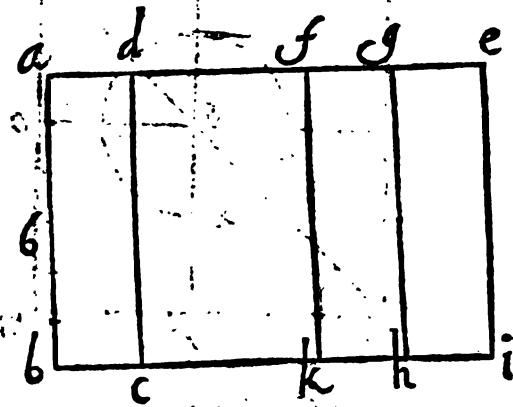
Seetur d e, bifariam in punto f, et cetera sicut ut superius. Erunt igitur a g, g e, longitudine incommensurabiles, ut constat ex 19. propos. lib. huius. Cum a e, plus possit, quam d e, quadrato rectae sibi incommensurabilis longitudine, sitque ad maiorem a e, applicatum parallelogramum aequale quartae parti ex minore d e, descripti, deficiens figura quadrata.

Quoniam vero a e, Rationalis est, et Rationali a b, exposita longitudine commensurabilis,

erit rectangulum $a i$, sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contentum, Rationale, ut constat ex 20. propos. libri huius.

Rursus cum $d e$, sit Rationalis, & Rationali $a b$, tantum commensurabilis potentia, hoc est, incommensurabilis longitudine, erunt rectangula $d i$, $f i$, Media ut constat ex 22. propos. lib. huius. Quoniam vero recta $a g$, $g e$, longitudine incommensurabiles sunt demonstratae, erunt rectangula $a h$, $g i$, eandem habentia rationem inter se, quam recta $a g$, $g e$, incommensurabilia.

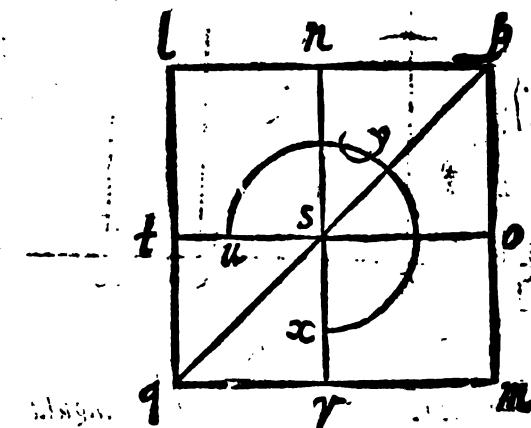
Nunc igitur facillime demonstrabimus, ut in propos. 92. rectam $t s$, posse spatium $a c$, contentum sub Rationali $a b$, & Apotoma quarta $a d$, Dico $t s$, Minorem esse.



Linea.

Rectangula.

$$\begin{aligned} a e, 9. \quad & \text{Rectangulum sub } a g, g e 13 \frac{1}{2} \\ d e, \sqrt{2} \gamma 54. \quad & a i, 54. \\ a g, \frac{1}{2} + \sqrt{2} \gamma 6 \frac{1}{2} \quad & a b, 27 + \sqrt{2} \gamma 243. \\ g e, \frac{1}{2} - \sqrt{2} \gamma 6 \frac{1}{2} \quad & g i, 27 - \sqrt{2} \gamma 243. \\ d f, \sqrt{2} \gamma 13 \frac{1}{2} \quad & d k, \sqrt{2} \gamma 486. \\ a d, 9 - \sqrt{2} \gamma 54. \quad & a c, 54 - \sqrt{2} \gamma 1944. \end{aligned}$$



Linea Quadratorum.

$$\begin{aligned} l o, \sqrt{2} \gamma (27 + \sqrt{2} \gamma 243). \\ f o, \sqrt{2} \gamma (27 - \sqrt{2} \gamma 243). \\ l s, \sqrt{2} \gamma (27 + \sqrt{2} \gamma 243) - \sqrt{2} \gamma (27 - \sqrt{2} \gamma 243). \\ \text{Quadrata.} \\ l m, 27 + \sqrt{2} \gamma 243. \\ n o, 27 - \sqrt{2} \gamma 243. \\ t r, 54 - \sqrt{2} \gamma 1944. \end{aligned}$$

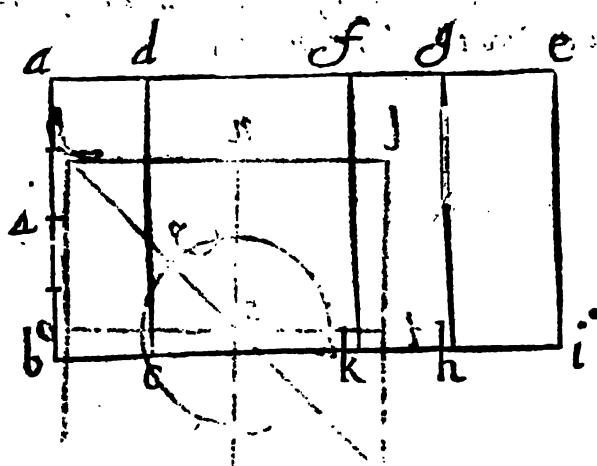
Quoniam enim ex constructione rectangulum $a i$, aquale est composito ex quadratis $l m, n o$, rectarum $t o, f o$, sit autem rectangulum $a i$, Rationale ostensum, erit & compositum illud illi aquale, Rationale: Quoniam vero rectangulum $f i$, Medium esse demonstravimus, erit & $l o$, illi aquale, Medium. Postremo cum rectangula $a h$, $g i$, sint inter se incommensurabilia demonstrata, erunt & quadrata $l m, n o$, illis aqualia, incommensurabilia, ac proinde & rectae $t o$, $f o$, potentia incommensurabiles. Quare cum rectae $t o$, $f o$, sint incommensurabiles potentia, facientque compositum ex ipsarum quadratis, Rationale, & rectangulum sub ipsis contentum, Medium, erit reliqua $t s$, Minor, ut vult 77. propos. lib. huius. Igitur si spatium continetur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 72. Propos. 96.

*S*i spatium continetur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens, est quæ cum Rationali Medium totum efficit.

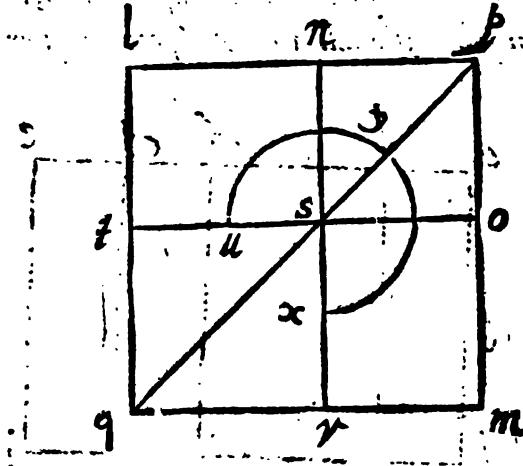
*S*IT contentum spatium $a c$, sub Rationali $a b$, & Apotoma quinta $a d$, Dico rectam, quæ spatium $a c$, poterit esse, quæ cum Rationali Medium totum facit.

Sit recta d, e , congruens ipsi a dierum igitur. a e, d e, Rationales, & tantum potentia commensurabiles, & d e, Rationali a b, exposita longitudine erit commensurabilis, & denique a e, plus poterit, quam d e, quadrato recta sibi incommensurabilis longitudine, ut constat ex definitione Apotome quinta. Secta sit d e, bifariam in punto f, & reliqua fiant ut superius. Erunt igitur ut in propos. antecedenti recta a g, g e, longitudine incommensurabiles, ut vult 19. propos. lib. huius.



Si Linea.

Rectangula.



Linea Quadratorum.

$$\begin{aligned} a e, \sqrt{2} \cdot 34. & \quad \text{Rectangulum sub } a g, g e, 9. \\ d e, 6. & \quad a i, \sqrt{2} \cdot 864. \\ a g, \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} + \sqrt{2} \cdot \frac{12}{4} & \quad a h, \sqrt{2} \cdot 216 + \sqrt{2} \cdot 72. \\ g e, \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} - \sqrt{2} \cdot \frac{12}{4} & \quad g i, \sqrt{2} \cdot 216 - \sqrt{2} \cdot 72. \\ a d, \sqrt{2} \cdot 34 - 6. & \quad d k, 12. \text{ Et } f i, 12. \\ a c, \sqrt{2} \cdot 864 - 24. & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t o, \sqrt{2} \cdot 38 (216 + \sqrt{2} \cdot 72.) & \\ s o, \sqrt{2} \cdot 38 (216 - \sqrt{2} \cdot 72.) & \\ t f, \sqrt{2} \cdot 38 (216 + \sqrt{2} \cdot 72) - \sqrt{2} \cdot 38 & \\ \text{Quadrata. } (216 - \sqrt{2} \cdot 72.) & \\ l m, \sqrt{2} \cdot 3 \cdot 216 + \sqrt{2} \cdot 72. & \\ n o, \sqrt{2} \cdot 3 \cdot 216 - \sqrt{2} \cdot 72. & \\ t r, \sqrt{2} \cdot 864 - 24. & \end{aligned}$$

Quoniam verò Rationalis a e, Rationali exposita a b, incommensurabilis est longitudine, ut iam prædiximus propos. 93. erit rectangulum a i, sub duabus potentia inter se tantum commensurabilibus contentum, Medium, ut vult 22. propos. lib. huius. Cum autem rectangulum d i, ac proinde & eius dimidium d k, sit contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, nimis sub d c, que Rationali a b, est aequalis, & sub d e, que eidem Rationali a b, longitudine commensurabilis est ostensa, erit ex 20. propos. lib. huius d i, Rationale.

Rursus rectangula a b, g i, erunt (ut ostensum est in propos. antecedenti) incommensurabilia, recta quoque t s, poterit spatium a c, contentum sub Rationali a b, & Apotoma quinta a d, ut demonstrauimus propos. 92. lib. huius. Dico rectam t s, eam esse, que cum Rationali Medium totum efficit. Nam cum rectangulum a i, demonstrarum sit Medium, erit & compositum ex quadratis l m, n o, rectangulari t o, s o, illi aequali ex constructione Medium. Sed cum rectangulum f i, Rationale sit ostensum, erit & rectangulum sub rectis t o, s o, contentum nimis l o, Rationale, cum illi sit aequalis.

Incommensurabiles autem potentia sunt t o, s o, ut colligatur ex demonstratione antecedenti, Igitur cum t o, s o, sint recta incommensurabiles potentia, facienteque compositum ex ipsis rectangulari, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale, erit ex propos. 78. lib. huius reliqua t s, ea, que cum Rationali Medium totum facit. Quare si spatium continetur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat ostendendum.

Theor.

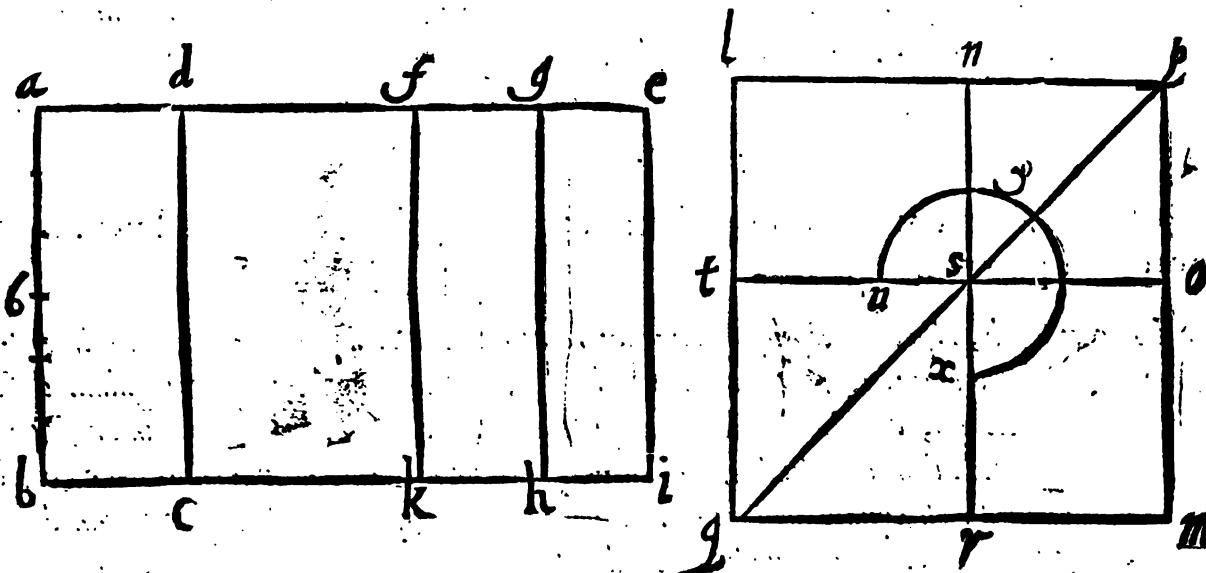
Theor. 73. Propos. 97.

S I spatium continetur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens, est quæ cum Medio Medium totum efficit.

S I T spatium a c, contentum sub Rationali a b, & Apotoma sexta a d, Dico rectam, que spatium a c, potest eam esse, que cum Medio Medium totum facit.

Congruat ipsi a d, recta d e, erunt igitur a e, d e, Rationales, & tantum potentia commensurabiles, & neutra ipsarum Rationali a b, expositæ longitudine erit commensurabilis, & denique a e, plus poterit, quam d e, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, ut constat ex definitione Apotomæ sextæ.

Secetur d e, bifariam in puncto f, & reliqua fiant ut prius. Erunt igitur rectæ a g, g e, incommensurabiles longitudine, ut vult 19. propos. lib. huius.



Lineæ.

Rectangula.

3

Lineæ Quadratorum.

$$a e, \text{Bz} \gamma 108.$$

$$\text{Rectangulum sub } a g, g e, 15 \frac{1}{4}$$

$$t o, \text{Bz} \gamma 88(972 + \text{Bz} \gamma 405)$$

$$d e, \text{Bz} \gamma 63.$$

$$a i, \text{Bz} \gamma 3888.$$

$$f o, \text{Bz} \gamma 88(972 - \text{Bz} \gamma 405).$$

$$a g, \text{Bz} \gamma \frac{108}{4} + \text{Bz} \gamma \frac{11}{4}$$

$$a h, \text{Bz} \gamma 972 + \text{Bz} \gamma 405.$$

$$t r, \text{Bz} \gamma 88(972 - \text{Bz} \gamma 405) - \text{Bz} \gamma 88(972$$

$$g e, \text{Bz} \gamma \frac{108}{4} - \text{Bz} \gamma \frac{11}{4}$$

$$g i, \text{Bz} \gamma 972 - \text{Bz} \gamma 405.$$

$$Quadrata - \text{Bz} \gamma 405)$$

$$d f, \text{Bz} \gamma 3.15 \frac{1}{4}$$

$$d k, \text{Bz} \gamma 567.$$

$$l m, \text{Bz} \gamma 972 - \text{Bz} \gamma 405.$$

$$a d, \text{Bz} \gamma 108 - \text{Bz} \gamma 63.$$

$$a c, \text{Bz} \gamma 3888 - \text{Bz} \gamma 2268.$$

$$n o, \text{Bz} \gamma 972 - \text{Bz} \gamma 405.$$

$$a c, \text{Bz} \gamma 108 - \text{Bz} \gamma 63.$$

$$a c, \text{Bz} \gamma 3888 - \text{Bz} \gamma 2268.$$

$$t r, \text{Bz} \gamma 3888 - \text{Bz} \gamma 2268.$$

Quoniam verò a e, & d e, Rationales sunt ex hypothesi, & vera quæ Rationali a b, expositæ longitudine incommensurabilis, erunt rectangula a i, & d i, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contenta, Media, ut docet 22. propos. lib. huius, ac proinde rectangulū f i, dimidium ipsius d i, Medium quoque erit, ut spaciois apotomis d i, & f i.

Rectangula quoque a h, g i, erunt inter se incommensurabilia, ut vult propos. 95. lib. huius.

Quoniam verò a e, d e, Rationales sunt, & tantum potentia commensurabilis, erunt rectangula a i, d i, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contenta, Media ex 22. pro-

Mm

poslib. huius. Quare cum rectangula d i, f i, sint inter se commensurabilia ostensa, erit f i, rectangulo a i, incommensurabile.

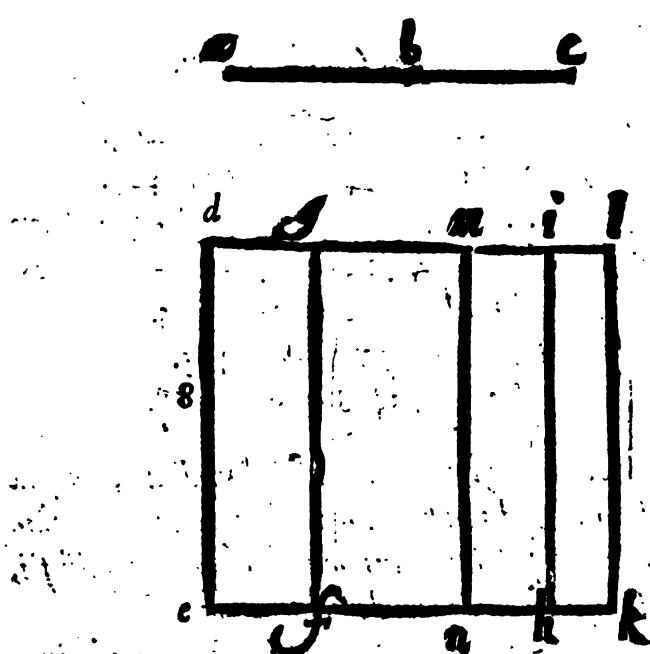
Facilime igitur demonstrabitur ut in propos. 92. lib. huius rectam t s, posse spatium contentum sub Rationali a b, & Apotoma sexta a d, Dico eam esse, que cum Medio Medium totum facit. Nam cum rectangulum a i, Medium sit ostensum erit compositum ex quadratis t m, n o, rectangularum t o, s o, illi aequale, Medium. Rursus cum rectangulum f i, Medium sit demonstratum, erit & illi aequale rectangulum l o, Medium. Cum autem rectangula a i, & f i, ostensa sint incommensurabilia, erunt quoque rectangulum l o, sub t o, s o, contentum, & compositum ex quadratis rectangularum t o, s o, incommensurabilia (est enim rectangulum l o, rectangulo f i, aequale, & rectangulum a i, composito ex rectangularis t o, s o, etiam aequale est ex constructione.)

Postremo cum t o, s o, potentia sint incommensurabiles, ut patet ex demonstratione propos. 95. lib. huius, faciantque compositum ex rectangularum quadratis, Medium, rectangulum etiam sub ipsis contentum, Medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis, erit reliqua t s, ex propos. 79. lib. huius, ea que cum Medio Medium totum facit. Igitur si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 74. Propos. 98.

Quadratum Apotomae ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT recta a b, Apotome, ipsique congruat recta b c, ita ut a c, b c, sint tantum inter se commensurabiles potentia. Exponatur Rationalis d e, ad quam applicetur rectangulum d f, aequale quadrato ex a b, latitudinem faciens d g, Dico rectam d g, esse Apotomen primam, Rursus ad eandem Rationalem d e, aliud rectangulum applicetur d h, aequale quadrato ex a c, & ad i k, que Rationali d e, est aequalis applicetur rectangulum i k, aequale ex b c, ita ut totum d k, aequale sit composito ex rectangularis a c, b c. Igitur cum compositum ex rectangularum quadra-



Linea.

a c, Bz 3 60.

b c, Bz 3 12.

a b, Bz 3 60 — Bz 3 12.

Omnis istae linea, & figura sunt vero numero expressa propos. 91. lib. huius.

ratio a c, b c, aequale sit rectangulo bis sub a c, b c, vna cum quadrato ex a b, ut constat ex lib. 2.

Si quadratum ex a, b, auferatur, et auferatur etiam rectangulum d, f, remanebit rectangulum g, k, rectangulo bis sub a c, b c, aequali, ac proinde diuisa g l, bifariam in m, ductaque m n, ipsi d e, parallela, erit rectangulum m k, aequali rectangulo sub a c, b c, contento.

Quoniam vero a c, b c, sunt Rationales, erunt earum quadrata Rationalia, et commensurabilia. Cum autem compositum ex ipsis earum quadratis verique quadrato ex illis descripto sit commensurabile, ut vult 16. propos. lib. huius, ex hoc compositum illud Rationale, hoc est rectangulum d k, illi aequali.

Rationale autem ad Rationalem applicatum latitudinem facit Rationalem, et ipsi Rationali ad quam applicatum est longitudine commensurabilem, ut constat ex 21. propos. lib. huius. Igitur recta d l, Rationalis est, et Rationali d e, exposita longitudine commensurabilis.

Deinde cum a c, b c, sint Rationales, et tantum potentia commensurabiles, erit rectangulum sub ipsis contentum, Medium, ut vult 22. propos. lib. huius.

Medium vero ad Rationalem applicatum latitudinem facit Rationalem, sed Rationali ad quam applicatum est longitudine incommensurabilem, ut constat ex 23. propos. lib. huius. Quare latitudo g l, erit Rationalis, sed Rationali g f, quae Rationali d e, est aequalis incommensurabilis erit longitudine.

Quoniam vero rectangulum d k, est Rationale ostensum, et rectangulum g l, Irrationale, erunt rectangula illa inter se incommensurabilia, ac propterea et rectae d l, g l, eandem cum illis rationes habentes longitudine incommensurabiles, ut vult 10. propos. lib. huius. Sunt autem d l, g l, Rationales ostensa. Igitur Rationales sunt d l, g l, et tantum commensurabiles potentia. Quare recte concludemus ex propos. 74. lib. huius reliquam d g, Apotomen esse. Dico et primam esse. Nam cum ex lemmate Clavi propos. 54. lib. huius, rectangulum sub a c, b c, hoc est rectangulum m k, Medium sit proportionale inter quadrata rectarum a c, b c, hoc est in inger rectangulum d h, i k, illis aequalia, erunt rectangula d h, m k, i k, continuè propotionalia, ac proinde et rectae d i, m l, i l, eandem proportionem cum illis habentes continuè proportionales erunt. Igitur rectangulum sub d h, i k, aequali erit quadrato ex m l, descripto, ut vult 17. propos. lib. 6. hoc est quartæ parti quadrati ex g l.

Quoniam vero quadrata ex a c, b c, hoc est rectangula d h, i k, illis aequalia sunt inter se commensurabilia, erunt rectae d i, i l, eandem rationem habentes cum illis longitudine commensurabiles ut constat ex 10. propos. lib. huius. Igitur cum duas rectas d l, g l, sint in aequalibus, et ad maiorem d l, sit applicatum rectangulum sub rectis d i, i l, aequali quarta parti quadrati ex minore g l, descripsi deficiens figura quadrata, sunt autem d i, i l, ostensa longitudine commensurabiles, poterit maior d l, plus, quam minor g l, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, ut docet 18. propos. lib. huius.

Igitur cum d g, sit Apotoma ostensa, positaque tota d l, plus, quam g l, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, si que d l, Rationali d e, exposita longitudine commensurabilis, erit ex definitione d g, Apotome prima; Quadratum igitur ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod erat ostendendum.

Theor. 75. Propos. 99.

QuADRATVM Media Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT Media Apotome prima a b, illaque congrua recta b c, sintque a c, b c, Media po-

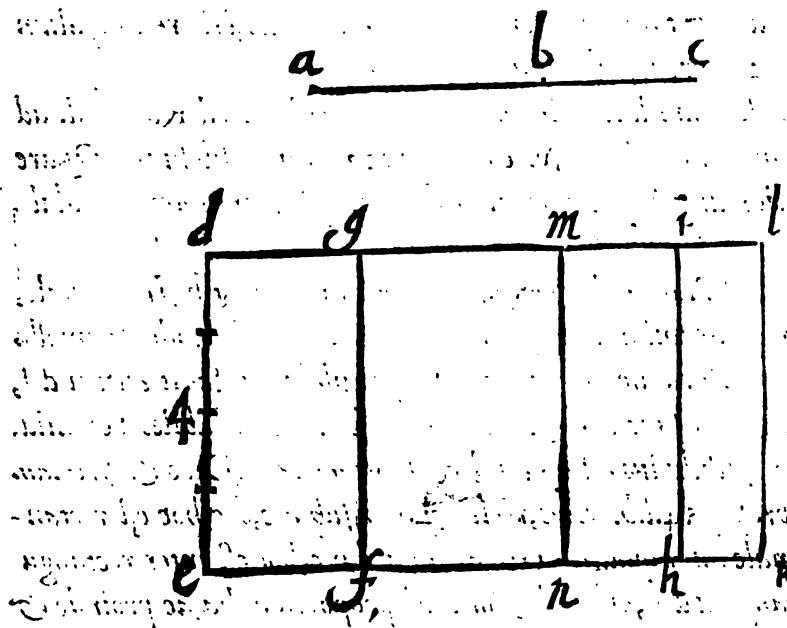
rentia tantum inter se commensurabiles Rationale continent. Exponatur Rationale d e, ad quam applicetur rectangulum d f, & quale quadrato ex a b, faciens latitudinem d g, Dico rectam d g, esse Apotomen secundam: Iisdem enim constructis ut supra in antecedenti propos. ita ut rectangula d h, & i k, & equalia sint quadratis ex a c, b c, descriptis, & rectangulum g k, & quale sit ei; quod bis sub a c, b c, continetur, ac properea rectangulum m k, & quale ei, quod sub a c, b c, continetur. Quoniam igitur a c, b c, Media sunt ex hypothesi, & tantum commensurabiles potentia, erunt earum quadrata, id est rectangula d h, i k, illus & equalia ex constructione Media, & commensurabilia, ac properea & d k, utique illorum commensurabile, ut vult 16. propos. lib. huic, quare Medium erit d k, ex corollario Clavi propos. 24. lib. huic.

Lineæ.

a c, Bz. 38. 500.

b c, Bz. 33. 20.

a b, Bz. 88. 500 — Bz. 38. 20.



Omnes ceteræ lineæ & figurae huius demonstrationis sunt vero numero expressæ propos. 93.

Medium autem d k, ad Rationalem applicatum latitudinem facit Rationalem, sed ei ad quam est applicatum longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propos. lib. huic, igitur latitudo d k, Rationale erit, & Rationali d e, longitudine incommensurabilis.

Rursum cum rectangulum sub a c, b c, Rationale sit ex hypothesi, erit & eius duplum ei commensurabile, Rationale, nimirum rectangulum g k.

Sed Rationale g k, ad Rationalem g f, (qua quidem Rationali d e, est & equalis) applicatum, latitudinem facit g l, Rationalem, sed ipsi g f, Rationali longitudine commensurabilis ut vult ei, propos. lib. huic.

Quoniam vero d k, Medium est, & g k, Rationale, erunt rectangula g k, & d k, incommensurabiles, rectæ quoque d l, g l, eandem habentes rationem cum illis longitudine incommensurabiles, ex 10. propos. lib. huic. Sed Rationales sunt demonstrata rectæ d l, g l, Rationales igitur sunt, & tantum potestia commensurabiles. Igitur rectæ concordantæ ex propos. 17. lib. huic, reliquam d g, esse Apotomen, quam secundam esse dico.

Pari enim medio, quo usi sumus propositione antecedenti demonstrabimus totum d l, plus posse, quam g l, quadraro rectæ sibi longitudine commensurabilis. Igitur cum congruens g l, sit ostensa Rationali d e, longitudine commensurabilis, erit ex definitione d g, Apotome secunda. Quadratum ergo Media Apotoma prima, ad Rationalem applicatum, Latitudinem facit Apotomen secundam. Quod erat ostendendum.

Theor.

Theor. 76. Propos. 100.

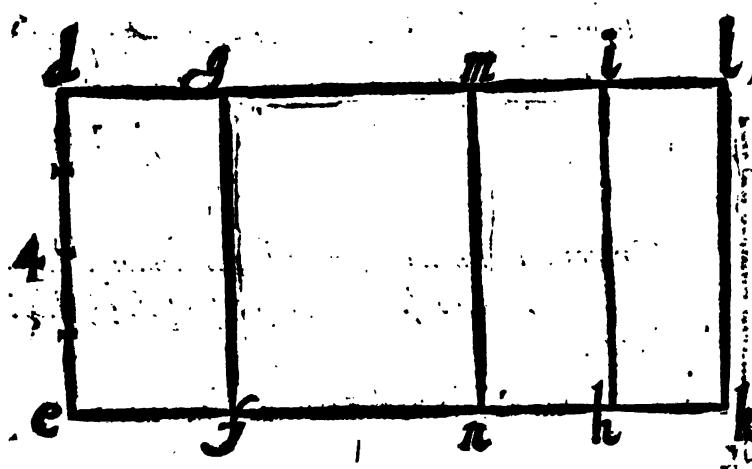
Quadratum Mediae Apotomae secundae ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT recta $a b$, Media Apotome secunda, & illi congruat recta $b c$, ita ut $a c, b c$, sint Mediae potentia tantum inter se commensurabiles, que Medium contineant. Exponatur Rationalis $d e$, & ad eam applicetur rectangulum $d f$, aequalis quadrato ex $a b$, faciens latitudinem $d g$. Dico rectam $d g$, esse Apotomen tertiam: Iisdem enim constructis ut supra, demonstrabimus ut in antecedenti rectangulum $d k$, esse Medium, atque cum sit applicatum ad Rationalem $d e$, efficere latitudinem $d l$, Rationalem, & Rationali exposita $d e$, longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propos. lib. huins.

Quoniam verò rectangulum sub $a c, b c$, Medium est ex hypothesi, eiusque duplum nimirum $g k$, erit etiam latitudo $g l$, Rationalis, sed Rationali $g f$ id est $d e$, longitudine incommensura-

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \hline \end{array}$$

$a c, Bz 33\frac{1}{2} 600$
 $b c, Bz 33\frac{1}{2} 24$
 $a b, Bz 33\frac{1}{2} 600 - Bz 33\frac{1}{2} 24$



Omnes aliae lineæ & figuræ etiam omnes huius demonstrationis, vera numero sunt expressæ propos. 94. lib. huins:

bilis. Cum autem $a c, b c$, sint potentia commensurabiles, & non longitudine, sitque ut $a c$, ad $b c$, ita per lemma 3. Clauij propos. 19. lib. huins quadratum ex $a c$, ad rectangulum sub $a c, b c$, contentum erit quadratum ex $a c$, rectangulo sub $a c, b c$, comprehenso, incommensurabile ex 10. propos. lib. huins. Compositum autem ex rectarum quadratis $a c, b c$, quadrato ex $a c$, est commensurabile, ut vult 16. propos. lib. huins. Cum quadrata ex $a c, b c$, ex Medium potentia tantum inter se commensurabilibus descripta, sine commensurabilitate, Rectangulo verò sub $a c, b c$, contento, commensurabile est, quod bis sub ipsis continetur. Quare ex scholio Clauij propos. 14. lib. huins, compescit ex rectarum quadratis $a c, b c$, hoc est, rectangulum $d k$, illi aequalis, incommensurabile erit rectangulo bis sub ipsis contento, hoc est, rectangulo $g k$, illi aequalis. Cum igitur rectæ $d l, g l$, tandem rationem inter se habeant, quam rectangula $d k, g k$, erunt $d l, g l$, longitudine inter se incommensurabiles. Sunt autem Rationales demonstratae rectæ $d l, g l$, Rationales igitur sunt, sed tantum potentia inter se commensurabiles. Quare rectæ concludemus ex propos. 74. lib. huins, reliquam $d g$, esse Apotomen, quam dico esse tertiam. Pari enim medio, quo usit sumus propos. 98. demonstrabimus rectam $d l$, plus posse, quam $g l$, illi congruens quadrato recta sibi

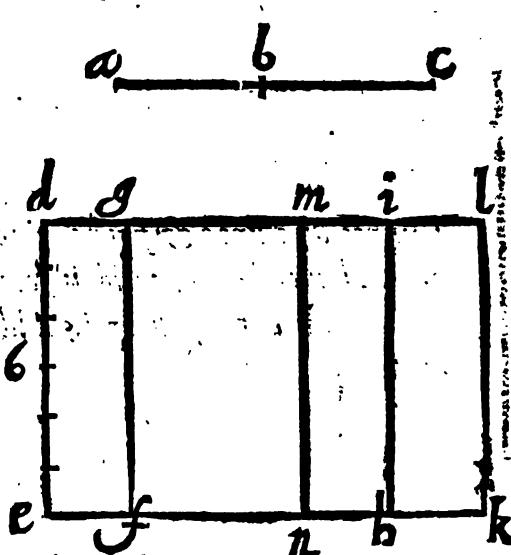
Nn

longitudine commensurabilis. Quare cum neutra ipsarum Rationali exposita d e, longitudine sit commensurabilis (quod demonstravimus) erit d g, ex definitione Apotome tertia. Quadratum igitur Mediae Apotome secundae ad Rationalem applicatum, et c. Quod erat ostendendum.

Theor. 77. Propos. 101.

Quadratum Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT recta a b, Minor, et illi congruat recta b c, ita ut a c, b c, sint incommensurabiles potentia, que faciant compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Exponatur Rationale d e, ad quam applicesur rectangulum d f, quadrato ex a b, aequali, faciens latitudinem d g. Dico rectam d g, esse Apotomen quartam, Iisdem enim constructio ut supra demonstrabimus rectangulum d k, (quod aequali est composto ex rectangularium quadratis a c, b c,) esse Rationale. Cum autem Rationale d k, ad Rationalem d e, sit applicatum efficiat latitudinem d l, Rationalem, et Rationali d e, a principio exposita longitudine commensurabilem, ut constat ex 21. propos. lib. huic.



$$a c, \text{Bz } 3(27 + \text{Bz } 3 \cdot 243.)$$

$$b c, \text{Bz } 3(27 - \text{Bz } 3 \cdot 243.)$$

$$a b, \text{Bz } 3(27 + \text{Bz } 3 \cdot 243) - \text{Bz } 3(27 - \text{Bz } 3 \cdot 243.)$$

Omnis aliae linea et figura huic demonstratio-
nis vero numero sunt expressae propos. 95. libri
huic.

Rursus cum rectangulum sub a c, b c, ac proinde et eius duplo, Medium sit ex hypothesi, faciet Medium illud ad Rationalem g f, quae Rationale d e, est aequalis, latitudinem g l, Rationalem, sed Rationali d e, exposita incommensurabilem longitudinem ex 23. propos. libri huic.

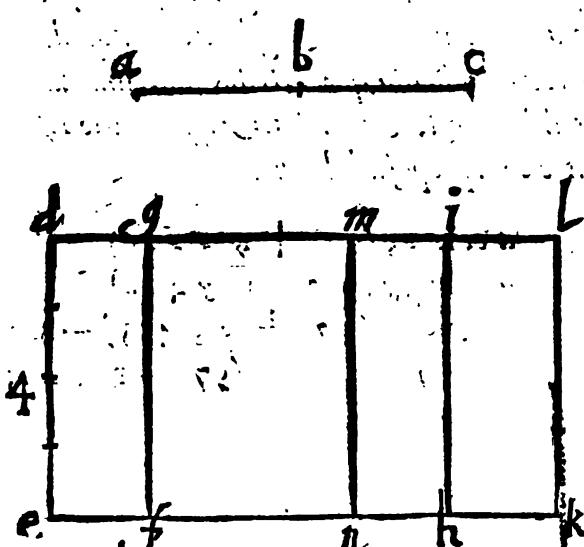
Deinde quoniam rectangulum d k, Rationale est ostensum g k, vero Irrationale, sive Me-
dium, erunt rectangula d k, g k, inter se incommensurabilia, recte quoque d l, g l, eandem ha-
bentes rationem cum illis, longitudine erunt incommensurabiles. Sunt autem Rationales ostense
recte d l, g l, Rationales igitur sunt, sed tantum potentia commensurabiles. Quare recte concluda-
mus ex 74. propos. lib. huic, reliquam d g, esse Apotomen, quam quartam esse dico. Nam cum
a c, b c, sint incommensurabiles potentia, erunt earum quadratae inter se incommensurabilia, at-
que adeo et rectangula d h, i k, illis aequalia ex constructione incommensurabilia erunt, ac proin-
de recte d i, i l, eandem cum illis rationem habentes longitudine, erunt incommensurabiles, ut

vult 10. propos. lib. huius. Cum autem rectangulum sub d i, i l, aequaliter sit quadrato ex m l, id est quartae parti quadrati ex g l, descripti, ut fuit a nobis ostensum propos. 98. lib. huius, poterit d l, plus, quam g l, quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis, ut vult 19. propos. lib. huius. Quare cum tota d l, plus possit, quam illi congruens g l, quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis, sitque d l, Rationali d e, ostensa commensurabilis longitudine erit ex definitione reliqua d g, Apotome quarta. Quadratum ergo Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 78. Propos. 102.

QVADRATVM cius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

S I recta a b, ea, quæ cum Rationali Medium totum facit, & illi congruat recta b c, ita ut a c, b c, sine recta potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum vero sub ipsis concentrum, Rationale.



$$\begin{aligned} a c, b c &= 3^2 (216 + 3^2 \cdot 72) \\ b c, b c &= 3^2 (216 - 3^2 \cdot 72) \\ a b, b c &= 3^2 (216 + 3^2 \cdot 72) - 3^2 (216 - 3^2 \cdot 72) \end{aligned}$$

Omnes linea & figura etiam huius demonstrationis vero numero sunt expressæ propos. 96. lib. huius.

Exponatur Rationalis d e, ad quam applicetur rectangulum d f, quadrato ex a b, aequaliter faciens latitudinem d g, Dico rectam d g, esse Apotomen quintam. Iisdem enim constructus, quæ supra. Igitur cum compositum ex rectarum quadratis a c, b c, alique adeo & rectangulum d k, illi aequaliter, Medium sit: sitque Medium illud d k, applicatum ad Rationalem d e, efficiat latitudinem d l, Rationalem, & Rationali d a, potestia longitudine incommensurabilem, ut vult 23. propos. lib. huius.

Rursus cum rectangulum sub a c, b c, Rationale sit, ac proinde & eius duplum hoc est g k, erit latitudo g l, Rationalis, & Rationali g f, quæ aequalis est Rationali d e, exposita longitudine commensurabilis ex 21. propos. lib. huius.

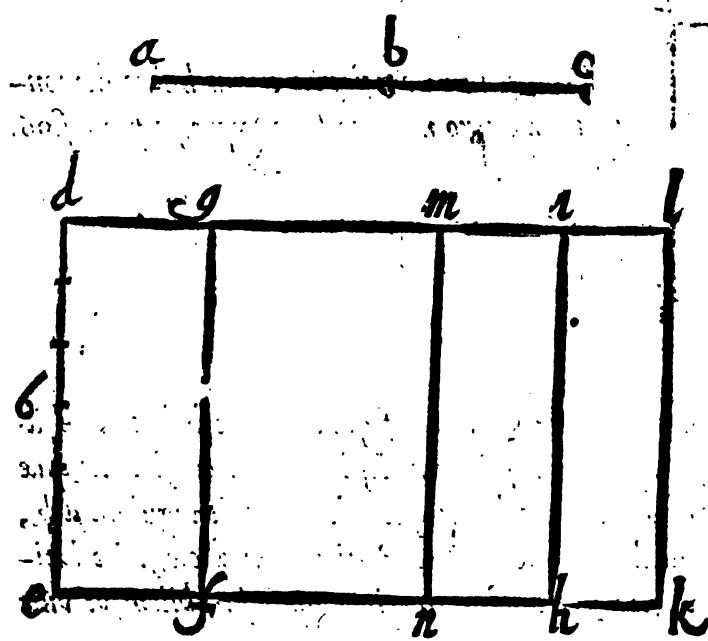
Quoniam vero rectangulum d k, Medium est ostensum, rectangulum vero g k, Rationale, erunt rectangula d k, g k, inter se incommensurabilia, Ac propterea recta d l, g l, tandem cum illis rationem habentes longitudine incommensurabiles erunt, ut constat ex 10. propos. lib. huius. Rationales tamen sunt ostensa d l, g l, Rationales igitur sunt, & tantum potestia commensurabiles. Quare non immerito concludetur cum propos. 74. lib. huius, reliquam d g, esse Apotomen.

quam quintam esse dico. Pari enim medio, quo usi sumus propos. antecedenti demonstrabitur rectam d l, plus posse, quam illi congruens g l, quadrato recta sibi incommensurabilis longitudine. Quocirca cum g l, Rationali d e, exposita longitudine sit ostensa commensurabilis, erit ex definitione reliqua d g, Apotome sexta. Quadratum igitur eius, quae cum Rationali Medium rotum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 79. Propos. 103.

Quadratum eius, quae cum Medio Medium rotum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta a b, ea, quae cum Medio Medium rotum facit, illaque congruat recta b c, ita ut a c, b c, sint rectae potentia inter se incommensurabiles, quae faciant compositum ex ipsis quadratis Medium, rectangulum etiam sub ipsis contentum, Medium, & incommensurabile composite ex ipsis quadratis, & exposita Rationali d e, applicetur ad eam rectangulum quadrato ex a b, aequali, latitudinem efficiens d g. Dico rectam d g, esse Apotomen sextam. Iisdem enim constructis, quae supra demonstrabimus tam rectangulum d k, quam rectangulum g k, esse Medium. Cum d k, composite ex rectarum quadratis a c, b c, sit aequali, & g k, etiam aequali ponatur rectangulo bis sub ipsis contento. Quare cum rectangula illa, que Media sunt, sint ad Rationales d e, & g f, applicata, facient latitudines d l, & g l, Rationales, & ipsis Rationalibus expositis longitudine incommensurabiles, ut constat ex 23. propos. lib. huius.



$$\begin{aligned} a c, & \approx 33(972 + 328405) \\ b c, & \approx 33(972 - 328405) \\ a b, & \approx 33(972 + 328405) - 33(972 - 328405) \end{aligned}$$

Omnies linea & figura huius demonstrationis vero numero sunt expressae propos. 97. lib. huius.

Quoniam vero rectangulum sub a c, b c, incommensurabile est composite ex ipsis quadratis, sineque rectangulum sub a c, b c, contentum, & rectangulum bis sub illis contentum, commensurabilia (nimurum g k, illi aequali,) erit rectangulum g k, rectangulo d k, incommensurabile, recta etiam d l, g l, tandem cum illis rationem habentes longitudine incommensurabiles, Sed iam Rationales sunt ostensa recta d l, g l. Igitur Rationales sunt, & tantum potentia inter se commensurabiles. Quare recte concludemus cum propos. 74. lib. huius reliquam d g, esse Apotomen. Dico & sextam esse. Pari enim medio, quo usi sumus propos. 101. demonstrabimus d l, plus posse, quam illi congruens g l, quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis. Cum igitur neutra

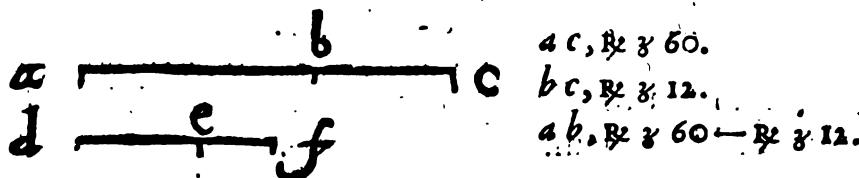
neutra ipsarum Rationali exposita d e, sit longitudine commensurabilis, erit ex definitione d g, Apotome sexta. Quadratum igitur eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 80. Propos. 104.

Recta linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT recta a b, Apotome, & illi congruat recta b c, ita ut a c, b c, sint Rationales, & tantum potentia inter se commensurabiles. Sit autem recta a b, longitudine commensurabilis recta d e, Dico & d e, esse Apotomen, & ordine eandem ipsi a b, siat ut a b, ad d e, ita b c, ad e f, id est quarta proportionalis inueniatur, ut vult propos. 12. lib. 6. erit igitur tota a c, ad totam d f, ut a b, ad d e, vel ut b c, ad e f, ut constat ex 12. propos. lib. 5. Quare cum a b, & d e, sint ex hypothesi longitudine commensurabiles, erunt quoque tota a c, d f, & b c, e f, longitudine commensurabiles.

$df, \text{Bz } 3.15.$
 $ef, \text{Bz } 3.3.$
 $de, \text{Bz } 3.15 - \text{Bz } 3.3.$



$ac, \text{Bz } 3.60.$
 $bc, \text{Bz } 3.12.$
 $ab, \text{Bz } 3.60 - \text{Bz } 3.12.$

Quoniam vero a c, b c, sunt Rationales, & tantum potentia commensurabiles, erunt d f, & e f, etiam Rationales commensurabiles potentia tantum, ut colligitur ex scholio Clavi 10. propos. lib. huius. Igitur cum Rationales sint demonstratae, recte concludemus ex 74. propos. lib. huius reliquam d e, esse Apotomen: Dico & eam esse ordine eandem ipsi a b.

Aut enim a c, plus poterit, quam b c, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si vero plus possit a c, quam b c, quadrato rectæ sibi commensurabilis, poterit & d f, plus, quam e f, quadrato etiam rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si a c, sit Rationali exposita commensurabilis longitudine, erit & d f, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ut vult 12. propos. lib. huius, ac propterea tam a b, quam d e, erit Apotome prima: Si vero b c, eidem Rationali sit longitudine commensurabilis, erit & e f, eidem Rationali commensurabilis longitudine. Quare ex definitione erunt a b, d e, Apotoma secunda. Si denique nostra ipsarum Rationali exposita longitudine sit commensurabilis, neutra quoque ipsarum d e, e f, eidem Rationali longitudine commensurabitur. Quare ex definitione erit a b, & d e, Apotome tertia: Sed si a c, plus possit, quam b c, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, poterit & d f, plus, quam e f, quadrato etiam rectæ sibi incommensurabilis longitudine, ut vult 15. propos. lib. huius. Quare par ratione, qua vsi sumus superius, ostendemus rectam d e, esse Apotomen quartam, vel quintam, vel sextam. Igitur recta linea Apotoma longitudine commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M . C L A V T I .

Item hic dicimus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de linea ex binis nominibus scriptissimus. Nimirum si recta d e, commensurabilis sit ipsi a b, potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco d e, vlt; longitudine commensurabilis: utiamur voce: potentia tantum commensurabilis) & d e, Apotomen esse: At non posse inferri, illum esse ordine eandem ipsi a b. Non enim sequitur, si tota a c, longitudine sit commensurabilis Rationali exposita, & d f, eidem esse commensurabilem longitudinem, propriequa quod non veraque neimped. rationales exposita, & d f, eidem a c, longitudine commensurabilis est, sed Rati-

o o

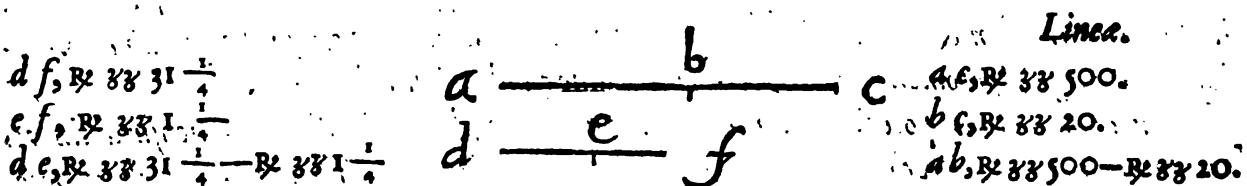
rionalis quidem commensurabilis longitudine; At vero si $a b$, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, ut $d e$, illi potentia tantum commensurabilis, sit Apotome eadem ordine. Sit enim $a b$, prima Apotome, secunda, quarta, vel quinta, eique congruens $b c$, & sit $d e$, ipsi $a b$, potentia tantum commensurabilis, quam quidem ut in theoremate, ostendemus Apotomen esse, eique congruentem $e f$, & partes $a b$, $b c$, ad partes $d e$, $e f$, tandem proportionem habere cum totis $a c$, $d f$. Dico nulla ratione $d e$, Apotomen esse ordine eandem ipsi $a b$. Nam si fieri potest, sit viaque Apotome prima. Quo posito, erit tam $a c$ tota, quam tota $d f$, ex definitione Apotome prime, Rationali exposita commensurabilis longitudine: atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt $a c$, & $d f$. Quare cum sit $a c$, ad $d f$, ita $a b$, ad $d e$, erint quoque $a b$, & $d e$, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum, ponitur enim $d e$, ipsi $a b$, potentia solum commensurabilis. Non ergo viaque $a b$, $d e$, Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Eset enim viaque congruens $b c$, $e f$, ex definitione longitudine commensurabilis Rationali exposita, atque adeo & ipsa inter se. Quocirca & $a b$, $d e$, inter se longitudine forent commensurabiles, quod non ponatur.

Semper tamen verum est, si $a b$, est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectam $d e$, que ipsi $a b$, potentia solum est commensurabilis, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit $a c$, plus, quam $b c$, quadrato recte & fibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit ut $a c$, ad $b c$, ita $d f$, ad $e f$, poterit quoque $d f$, plus, quam $e f$, quadrato recte & fibi commensurabilis. Quare ex definitione erit $d e$, Apotome prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si $a b$, est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut $a c$, plus possit, quam $b c$, quadrato recte & fibi longitudine incommensurabilis, erit quoque $d e$, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta quamvis ordine non eadem ipsi $a b$, quia rursus, cum sit ut $a c$, ad $b c$, ita $d f$, ad $e f$, poterit quoque $d f$, plus, quam $e f$, quadrato recte & fibi longitudine incommensurabilis. Quare ex definitione erit $a b$, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta. In sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit $d e$, eadem ordine ipsi $a b$, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

Theor. 81. Propos. 105.

Recta linea Media Apotome commensurabilis, & ipsa Media Apotome est, atque ordine eadem.

SIT recta $a b$, Media Apotome quacunque, illaque congruat recta $b c$, ita ut $a c$, $b c$, Media sine potentia tantum commensurabiles, facientes aut Rationale, aut Medium.



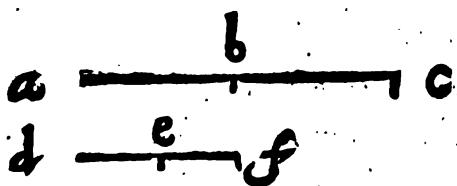
Sit ipsi $a b$, recta $d e$, commensurabilis sine longitudine & potentia simul, sive potentia tantum. Dico & $d e$, Media Apotomen esse, & ordine eandem ipsi $a b$, lisdem enim constructis ut supra antecedentis propositione, erunt igitur $a b$, & $d e$, $b c$, & $e f$, eodem modo commensurabiles. Quoniam vero $a c$, $b c$, Media sunt, erunt & illis commensurabiles $d f$, $e f$, Media. Rursus cum sit ut $a c$, ad $d f$, ita $b c$, ad $e f$, & permutando ut $a c$, ad $b c$, ita $d f$, ad $e f$, Sunt autem $a c$, $b c$, solum potentia commensurabiles, erunt etiam $d f$, $e f$, tantum potentia commensurabiles, ex scholio Clavi propos. 10. lib. huius. Igitur cum $d f$, & $e f$, sint Media ostensa, recte inferuntur ex 74. propos. lib. huius, reliquam $d e$, esse Media Apotomen, quam dico ordine esse eandem ipsi $a b$. Nam cum sit ut $a c$, ad $b c$, ita $d f$, ad $e f$, & ut $a c$, ad $b c$, ita est quadratum ex $a c$, ad rectangulum sub $a c$, $b c$, ex lemmate 3. Clavi propos. 19. lib. huius. Et ut $d f$, ad $e f$, ita quadratum ex $d f$, ad rectangulum sub ipsis contentum, erit quoque ut quadratum ex $a c$, ad rectangulum sub $a c$, $b c$, ita quadratum ex $d f$, ad rectangulum sub $d f$, $e f$, & permutando ut quadratum ex $a c$, ad quadratum ex $d f$, ita rectangulum sub $a c$, $b c$, ad rectangulum sub $d f$, $e f$, contentum. Quare cum quadratum ex $a c$, quadrato ex $d f$, commensurabile sit ostensum, cum recta $a c$, $d f$, longitudine sint commensurabiles demonstratae, erit rectangulum sub $a c$, $b c$, rectangulo sub $d f$, $e f$, commensurabile, ex 10. propos. lib. huius. Quare si rectangulum sub $a c$,

$b c$, est Rationale, erit ergo rectangulum sub d f, e f, Rationale, Ac proinde recta d c, Media Apotome prima erit, ex 75. propos. lib. huius. Si verò rectangulum sub a c, b c, Medium sit, erit ergo rectangulum sub d f, e f, contentum, Medium, ac proinde ex 76. propos. recta d c, Media Apotome secunda erit. Recta igitur linea Media Apotoma commensurabilis, ergo c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 82. Propos. 106.

Recta linea Minoris commensurabilis; & ipsa Minor est.

SIT recta a b, Minor, etique congruar recta b c, ita ut a c, b c, sint rectae potentia incomensurabiles, quæ faciant compositum ex ipsis quadratis, Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium.



Sit ipsi a b, commensurabilis d e, vel longitudine ergo potentia simul, vel potentia tantum. Dico rectam d e, Minorem esse. Fiant reliqua ut supra, ita ut rursus a b, b c, d e, ergo e f, simili-
dem habeant rationem, quam a c, ad d f, erunt. igitur ut in propos. antecedenti, d f, ergo e f, ipsis
a c, b c, commensurabiles vel longitudine ergo potentia simul, vel potentia tantum.

Quoniam vero est ut a c, ad d f, ita b c, ad e f, ergo permutando ut a c, ad b c, ita d f, ad e f,
erit quoque ut quadratum ex a c, ad quadratum ex b c, ita quadratum ex d f, ad quadratum ex
e f, ergo componendo ut compositum ex rectarum quadratis a c, b c, ad quadratum ex b c, sic com-
positum ex rectarum quadratis d f, e f, ad quadratum ex e f, ergo permutando, ut compositum ex
rectarum quadratis a c, b c, ad compositum ex rectarum quadratis d f, e f, ita quadratum ex b c,
ad quadratum ex e f. Quadratum autem ex b c, quadrato ex e f, commensurabile est ostensum.
Igitur compositum ex rectarum quadratis a c, b c, composito ex rectarum quadratis d f, e f, com-
mensurabile erit. Sed compositum ex rectarum quadratis a c, b c, Rationale ponitur: Igitur ergo
compositum ex quadratis rectarum d f, e f, ei commensurabile, Rationale erit.

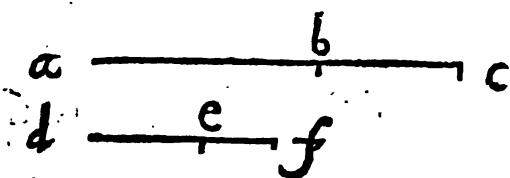
Rursus cum rectangulum sub a c, b c, Medium sit, erit ergo illi commensurabile rectangulum
sub d f, e f, Medium. Ostendimus enim propositione antecedenti rectangula illa inter se esse com-
mensurabilia.

Quoniam vero est ut a c, ad b c, ita d f, ad e f, sunt autem a c, b c, incommensurabiles po-
tentia, erunt ergo d f, e f, potentia incommensurabiles. Quare cum d f, e f, sint potentia incom-
mensurabiles, quæ faciunt compositum ex rectarum quadratis, Rationale, ergo rectangulum sub
ipsis contentum, Medium, recte concludemus ex 77. propos. lib. huius rectam d e, esse Minorem.
Minori igitur commensurabilis, ergo c. Quod erat ostendendum.

Theor. 83. Propos. 107.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficiet, &
ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

SIT recta $a b$, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit, & illi congruat recta $b c$, ita ut $a c, b c$, sint recta potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum ex ipsis quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale.



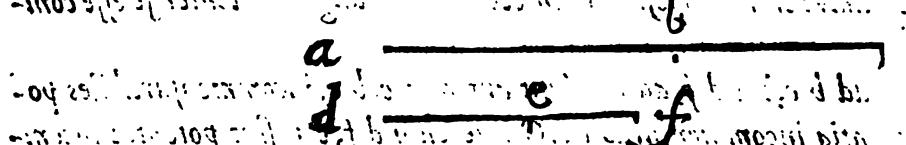
Sit ipsi $a b$, commensurabilis vel longitudine & potentia simul, vel potentia tantum recta $d e$. Dico rectam $d e$, eam esse, quæ cum Rationali Medium totum facit. Fiant reliqua ut in antecedentibus. Igitur demonstrabimus ut in propos. antecedenti compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$, composito ex rectarum quadratis $d f, e f$, esse commensurabile. Cum autem compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$, ex hypothesi Medium sit, erit & illi commensurabile compositum ex quadratis rectarum $d f, e f$, Medium.

Denique demonstrabimus ut in propos. 105. rectangulum sub $a c, b c$, rectangulo sub $d f, e f$, esse commensurabile. Quare cum rectangulum sub $a c, b c$, Rationale ponatur, erit & rectangulum sub $d f, e f$, Rationale: ostensa sunt autem ut in propos. antecedenti rectæ $d e, e f$, incommensurabiles, potentia. Quare cum $d e, e f$, sint potentia inter se incommensurabiles, facienteque compositum ex ipsis quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale, recte concludemus ex 78. propos. lib. huius, reliquam $d e$, eam esse, quæ cum Rationali Medium totum facit. Recta igitur linea commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 84. Propos. 108.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

SIT recta $a b$, ea, quæ cum Medio Medium facit, & illi congruat recta $b c$, ita ut $a c, b c$, sint incommensurabiles potentia, quæ faciant compositum ex rectarum quadratis, Medium, & rectangulum sub ipsis, Medium, incommensurabileque composito ex rectarum quadratis.



Sit recta $d e$, commensurabilis ipsi $a b$, aut longitudine & potentia simul, aut potentia tantum. Dico rectam $d e$, esse etiam eam, quæ cum Medio Medium totum facit. Fiant reliqua ut prius. Igitur demonstrabimus ut in propos. 106. compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$, composito ex quadratis rectarum $d f, e f$, esse commensurabile. Medium autem ponitur compositum ex rectarum quadratis $a c, b c$. Igitur ex corollario Clavi propos. 2. 4. lib. huius erit rectangulum sub $d f, e f$, Medium.

Rufus

Rursus ut in propos. 106. demonstrabimus rectangulum sub a c, b c, rectangulo sub d f, e f, esse commensurabile: est autem rectangulum sub a c, b c, ex hypothesi Medium. Igitur ei commensurabile, quod sub d f, e f, continetur, Medium erit, ex eodem corollario Clavi propos. 24. lib. huius. Postremo cum composite ex rectarum quadratis a c, b c, compositum ex quadratis rectangularum d f, e f, ostensum sit commensurabile, rectangulo vero sub a c, b c, commensuratur quoque rectangulum sub d f, e f. Sunt autem ex hypothesi compositum ex rectarum quadratis a c, b c, et rectangulum sub ipsis contentum, incommensurabilia, erunt quoque ex scholio Clavi propos. 14. lib. huius, compositum ex rectangularum quadratis d f, e f, et rectangulum sub d f, e f, inter se incommensurabilia.

Quare cum d e, e f, sint incommensurabiles potentia, faciante compositum ex ipsarum quadratis, Medium, rectangulum etiam sub ipsis contentum, Medium, et incommensurabile composite ex ipsarum quadratis, recte concludemus cum propos. 79. lib. huius reliquam d e, eam esse, qua cum Medio Medium totum facit. Recta igitur linea commensurabilis ei, qua cum Medio, et c. Quod erat ostendendum.

Theor. 85. Propos. 109.

M E D I O à Rationali detracto, Recta linea, quæ reliquum spatium potest, una ex duabus Irrationalibus sit, vel Apotome, vel Minor.

D E T R A H A T V R ex Rationali a d, Medium c d, Dico rectam, que potest spatium reliquum a b, esse vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur Rationalis e f, et ad eam applicatur rectangulum e g, rectangulo a b, aequale, et ad g, h, quæ Rationali e f, est aequalis aliud rectangulum applicetur h i, rectangulo c d, aequale. Quoniam igitur rectangulum e i, rectangulo Rationali a d, est aequale, erit e i, Rationale, ac propterea et recta e k, Rationalis, ut constat ex 21. propos. lib. huius.

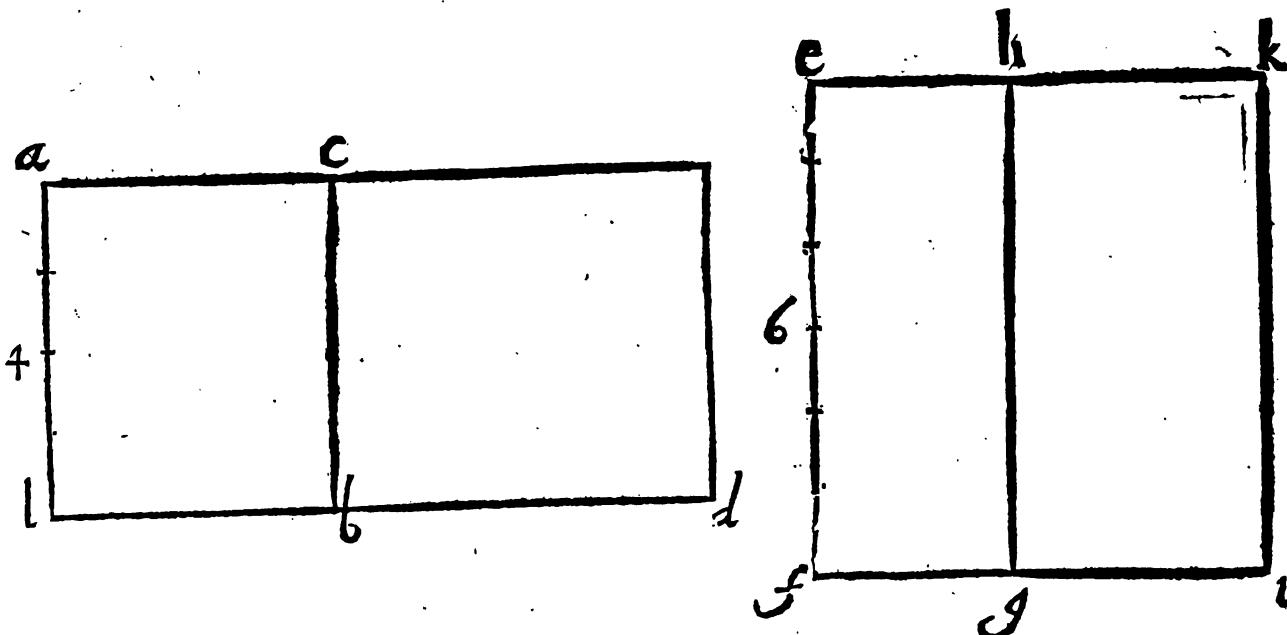
Rursuscum rectangulum h i, Medio c d, aequale ex constructione Medium sit, sitque applicatum illud Medium ad Rationalem h g, faciet latitudinem h k, Rationalem, sed Rationali h g, ad quam applicatum est incommensurabilem longitudine, ut vult 23. propos. lib. huius. Quare cum e k, Rationali e f, longitudine commensurabilis sit ostensa, recta vero h k, eidem Rationali minime longitudine commensurabilis sit demonstrata, et sunt recte e k, h k, longitudine incommensurabiles. Rationales tamen sunt ostensa. Igitur Rationales erunt rectae e k, h k, et tantum commensurabiles potentia, recte igitur concludemus cum 74. propos. lib. huius, reliquam e h, Apotomen esse, et que erit congruens h k. Nam vera aut e k, plus possit, quam h k, quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis.

Si vero e k, plus possit, quam h k, quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, cum tota e k, Rationali e f, exposita longitudine sit commensurabilis ostensa, erit recta e h, ex definitione Apotome prima. Quare recta potens spatium e g, contentum, sub Rationali e f, et Apotoma prima e h, hoc est, spatium a b, sibi aequale, Apotome est, ut vult 92. propos. lib. huius.

Sed si e k, plus possit, quam h k, quadrato rectae sibi incommensurabilis longitudine, cum tota e k, Rationali e f, exposita longitudine commensurabilis sit demonstrata, erit ex definitione reliqua e h, Apotome quarta. Igitur recta, que poterit spatium e g, contentum sub Rationali

P.p.

e f, &c Apotoma quarta e h, hoc est, spatium a b, illi aequale Minor est, ut constat ex 95. propos. lib. huius. Medio igitur à Rationali detracto, &c. Quod erat ostendendum.



Lineæ.	Rectangula.	Linea secundæ figuræ.	Rectangula.
$a l, 4.$	$a d, 32.$	$e k, 5 \frac{1}{3}.$	$e i, 32.$
$l d, 8.$	$c d, 32 \frac{8}{9} 320.$	$b k, 32 \frac{8}{9} 320.$	$h i, 32 \frac{8}{9} 320.$
$b d, 32 \frac{8}{9} 20.$	$a b, 32 - 32 \frac{8}{9} 320.$	$e b, 5 \frac{1}{3} - 32 \frac{8}{9} 320.$	$e g, 32 - 32 \frac{8}{9} 320.$
$l b, 8 - 32 \frac{8}{9} 20.$			
<i>Linea potens spatium e g, erit Minor, nimisum $\frac{8}{9} (16 + 32 \frac{8}{9} 176) + \frac{8}{9} (16 - 32 \frac{8}{9} 176).$</i>			

Theor. 86. Propos. 110.

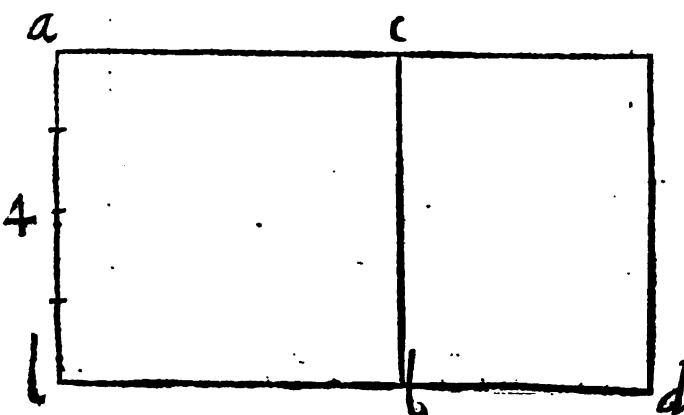
RATIONALI à Medio detraæto, aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome pñmæ, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHAT VR à Medio à d, rectangulum Rationale c d, Dico rectam, que poterit reliquum spatium a b, esse vel Media Apotomen primam, vel eam, que cum Rationali Adiætum totum facit. Fiat constructio ut supra. Igitur cum rectangulum e i, Medio à d, aequalè sit, erit rectangulum e i, Medium. Quod cum sit applicatum ad Rationalem e f, faciet latitudinem e k, Rationalem, & Rationali e f, exposita longitudine incommensurabilem vi vide 23. propos. libri huius.

Quoniam vero rectangulum h i, Rationali c d, est aequalè erit h i, Rationales. Ac proinde ex ad. propos. lib. huius recta h k, Rationalis, & Rationali h g, que aequalis est ipsi e f, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarum e k, h k, illa quidem Rationali exposita sit longitudine incommensurabilis ostensa; Hæc vero eidem Rationali longitudine commensurabili sit, erant inter se incommensurabiles longitudine rectæ e k, h k, Rationales tamè sunt demonstrare, Rationales igitur sunt e k, h k, & tantum potentia commensurabiles.

Iam vero ante e k, plus poterit, quam h k, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Igitur si recta e k, plus possit, quam h k, quadrato rectæ sibi longitud-

dine commensurabilis, Cum h k, Rationali exposita sit longitudine commensurabilis ostensa, erit ex definitione reliqua e h, Apotome secunda. Quare recta potens spatium a b, contentum sub Rationali e f, & Apotoma secunda e h, Media Apotome est prima, ut constat ex 93. propos. lib. huins.

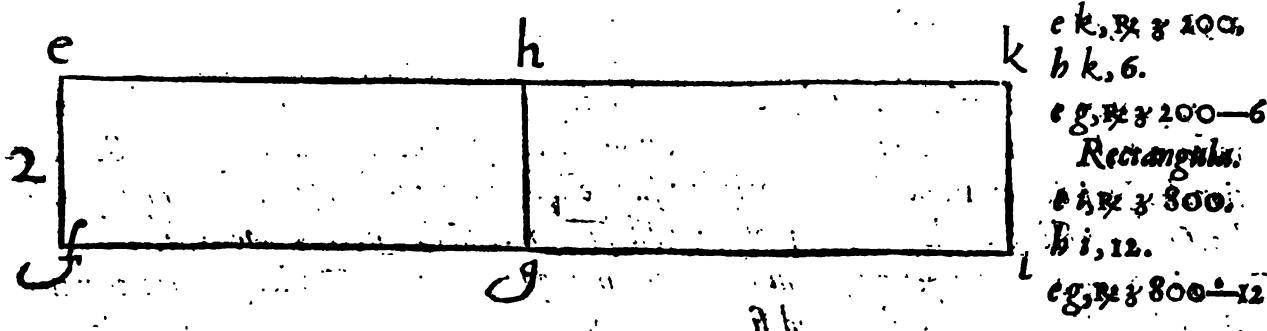


Linea prima figura.

l d, $\sqrt{2} \approx 50$.
b d, 3.
l b, $\sqrt{2} \approx 50 - 3$.
Rectangula.
a d, $\sqrt{2} \approx 800$.
c d, 12.
a b, $\sqrt{2} \approx 800 - 12$.

Linea potens spatium e i, erit $\sqrt{2}(\sqrt{2} \approx 200 - \sqrt{2} \approx 164) - \sqrt{2}(\sqrt{2} \approx 200 - \sqrt{2} \approx 164)$ que cum Rationali Medium totum efficiens appellatur.

Linea secunda figura.



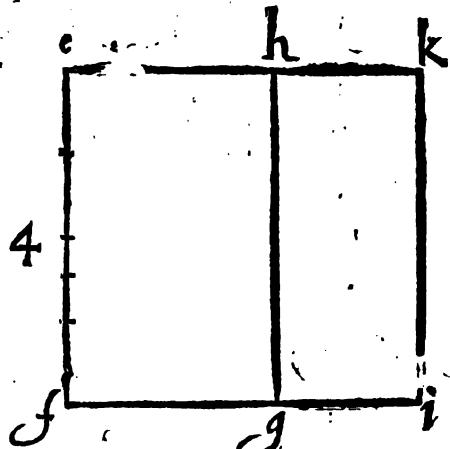
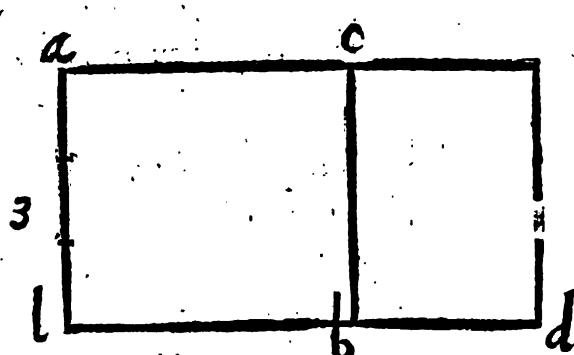
Si vero e k, plus posse, quam h k, quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis, Cum h k, Rationali exposita longitudine sit ostensa commensurabilis, erit ex definitione reliqua e b, Apotome quinta. Quare recta, que poterit spatium contentum sub Rationali e f, & Apotoma quinta e h, ea est, que cum Rationali Medium totum facit, ut constat ex 96. propos. lib. huins.

Rationali igitur à Medio detracto, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 87. Propos. III.

Medio à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediaz Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

AUFERATVR à Medio à d, Mediasti c d, quod incommensurabile sit toti a d, Dico rectam, que poterit reliquum spatium a b, esse vel Media Apotomen secundam, vel eam, que cum Medio Medium totum facit, fiat constructio ut supra. Igitur cum rectangula e i, & h i, Media à d, & d aequalia sint, siueque applicata ad Rationales e f, h g, efficiant latitudines e k, h k, Rationales, & ipsi Rationalibus longitudine incommensurabiles, ut constat ex 23. propos. lib. huins.



Linea prima figura.

$$l d, \text{Bz} \sqrt{31}$$

$$b d, \text{Bz} \sqrt{4 \frac{1}{4}}$$

$$l b, \text{Bz} \sqrt{31} - \text{Bz} \sqrt{4 \frac{1}{4}}$$

Rectangula.

$$a d, \text{Bz} \sqrt{279}$$

$$c d, \text{Bz} \sqrt{40}$$

$$a b, \text{Bz} \sqrt{279} - \text{Bz} \sqrt{40}$$

Linea secunda figura.

$$e k, \text{Bz} \sqrt{17 \frac{7}{16}}$$

$$h k, \text{Bz} \sqrt{2 \frac{1}{4}}$$

$$e h, \text{Bz} \sqrt{17 \frac{7}{16}} - \text{Bz} \sqrt{2 \frac{1}{4}}$$

Rectangula figura secunda eadem

sunt, quæ prima

ex constructione.

Linea potens spatium e i, erit $\text{Bz} \sqrt{(\text{Bz} \sqrt{69 \frac{1}{4}} + \text{Bz} \sqrt{59 \frac{1}{4}})} - \text{Bz} \sqrt{(\text{Bz} \sqrt{69 \frac{1}{4}} - \text{Bz} \sqrt{59 \frac{1}{4}})}$ que cum Medio Medium totum efficiens appellatur.

Quoniam verò rectangula a d, c d, id est e i, h i, ponuntur inter se incommensurabilia, crunc recta e k, h k, eadem cum illis habentes Rationem longitudine incommensurabiles. Sed Rationales sunt demonstratae, Rationales igitur sunt e k, h k, et tantum potentia commensurabiles. Quare rectè concludemus cum propos. 74. lib. huins reliquam e b, Apotomen esse.

Iam verò e k, plus poteris, quam congruens h k, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis; sed si e k, plus possit, quam h k, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis, Cum neutra ipsarum Rationali expositæ longitudo sit ostensa commensurabilis, erit ex definitione reliqua e h, Apotome tertia: Quare recta potens spatium contentum sub Rationali e f, et Apotome tertia e b, hoc est spatium a b, Media Apotome est secunda, ex 94. propos. libri huins.

Si verò e k, plus possit, quam h k, quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum Rationali expositæ sit longitudine commensurabilis, erit ex definitione reliqua e b, Apotome sexta.

Quare recta, qua poterit spatium contentum sub Rationali e f, et Apotoma sexta e b, hoc est spatium a b, illa æquale, id est, quæ cum Medio Medium totum facit, ut concludimus propos. 97. lib. huins. Medio igitur à Medio derat, et c. Quod certas demonstrandum.

Theor. 88. Propos. II.

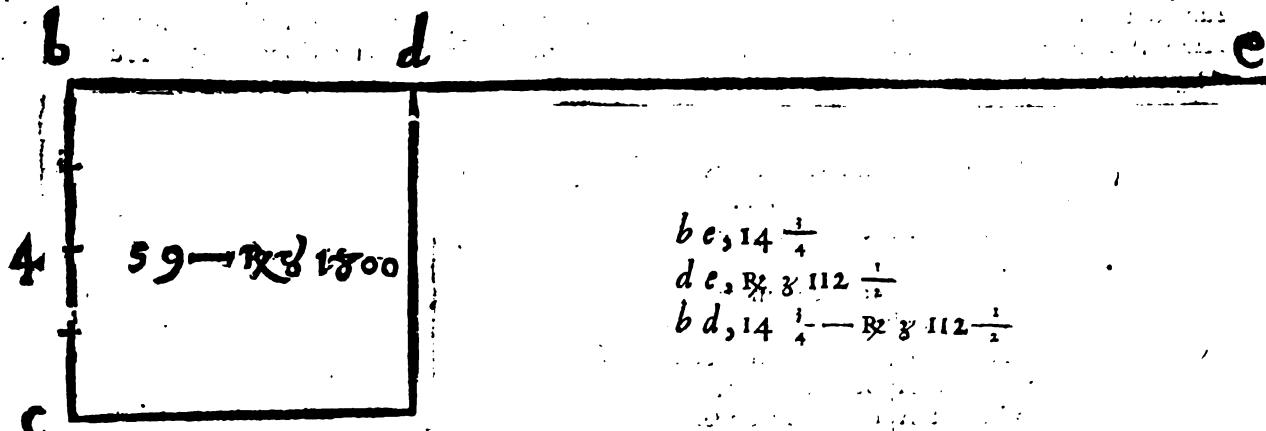
A P O T O M E non est eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT recta a, Apotome quæcumque. Dico: non esse eadem, quæ ex binis nominibus. Sit a, si fieri potest una ex binis nominibus, ex expressa Rationali b, t. applicari illa recta a, triangulum c d, æquale quadrato ex Apotome a, descripto. Quoniam igitur recta a, est Apotome ex hypothesi, erit latitudo b d, Apotome prima, ut constat ex 98. propos. lib. huins.

Con-

Congruat igitur ipsi $b d$, recta $d e$, erunt igitur ex definitione Apotome prima $b e, d e$, Rationales, & tantum potentia commensurabiles, & $b e$, plus poterit, quam $d e$, quadrato rectae fibi longitudine commensurabilis, & denique $b e$, Rationali expositae $b c$, longitudine commensurabitur.

a —————
B. S. S. O. — 3



Rursus cum a , ponitur etiam esse ex binis nominibus, eris eadem latitudo $b d$, ex binis nominibus prima, ut vult propos. 61. lib. huius. Sit ipsis $b d$, maius nomen $b f$, erunt igitur ex definitione eius, que est ex binis nominibus prima $b f, f d$, Rationales, & tantum potentia commensurabiles, & maius nomen $b f$, plus poterit, quam minus quadrato rectae fibi longitudine commensurabilis, & denique maius nomen $b f$, Rationali $b c$, expositae erit longitudine commensurabile. Quare cum $b e$, & $b f$, Rationali $b c$, sine longitudine commensurabiles, erunt etiam $b e, b f$, inter se commensurabiles longitudine, ut vult propos. 12. lib. huius. Cum autem tota $b e$, longitudine sit commensurabilis parti $b f$, erit & $b e$, reliqua parti $f e$, longitudine commensurabilis, ex corollario Clavi propos. 16. lib. huius. Quare cum $b e$, sit Rationalis, erit & $f e$, Rationalis. Quoniam vero duarum rectarum $b e, f e$, longitudine inter se commensurabilium illa, longitudine est incommensurabilis ipsis $d e$, (sunt enim $b e, d e$, Rationales, & tantum potentia commensurabiles) erit quoque altera $f e$, eidem $d e$, longitudine incommensurabilis. Sed Rationales sunt ostensa $f e, d e$, Igitur Rationales sunt, sed tantum potentia commensurabiles. Ac proinde cum 74. propos. lib. huius recte concludemus, reliquam $f d$, Apotomen esse, & Irrationalem, Rationalis tamen est ostensa $f d$, Quod absurdum. Non igitur a , Apotome, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM EX CLAVIO.

Ex demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse eadem.

Quadratum enim Media ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationale longitudo incommensurabilem.

At quadratum Apotoma ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen primam.

Et quadratum Mediæ Apotoma primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen secundam.

Quadratum vero Mediæ Apotoma secunda ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen tertiam.

Quadratum deinde Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quartam.

At vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quintam.

Quadratum denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen sextam.

Q q

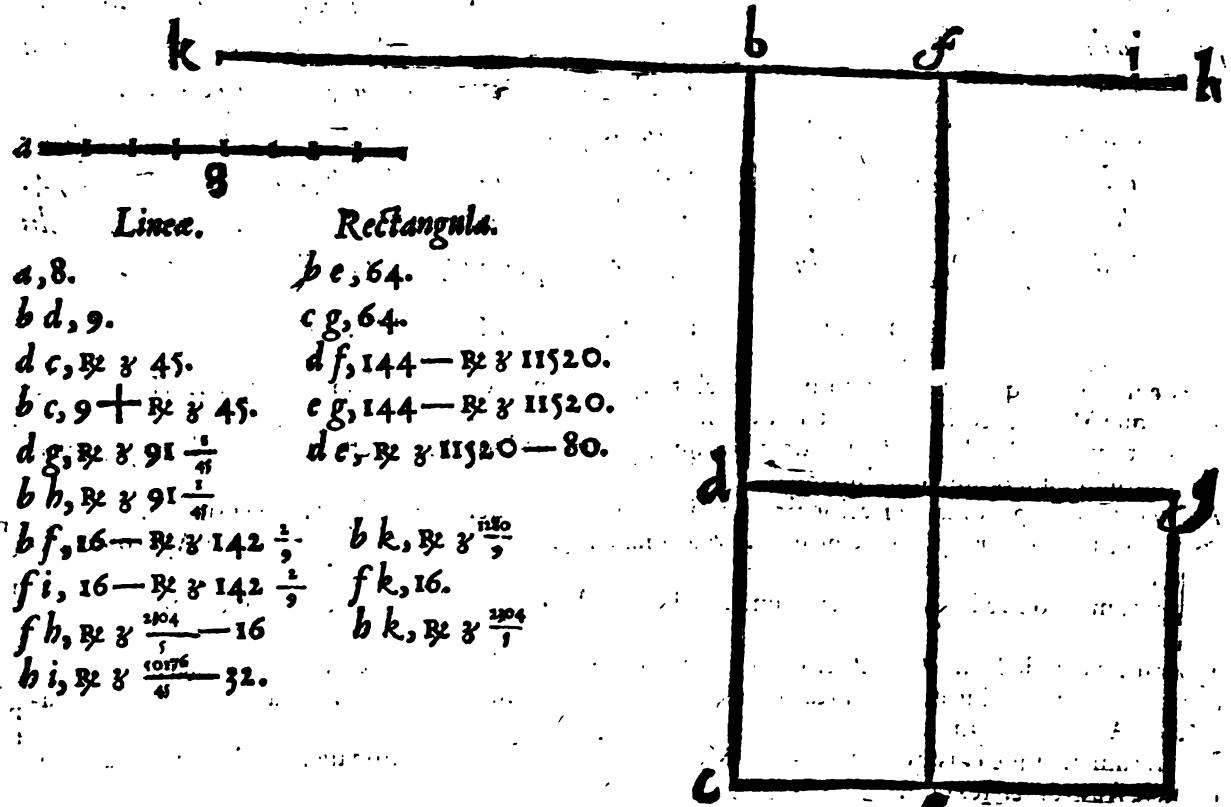
Iaque cum haec latitudines differant, & à latitudine Media, & inter se, à latitudine quidem Media, quod haec Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eadem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & à Media, & inter se differere.

Quoniam vero in hoc theoremate demonstravimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & ceterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquidò constat, latitudines Apotomæ, & ceterarum Irrationalium, quæ post ipsam, easdem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quamobrem cum & tam illæ, quamvis à Media differant; efficitur, Rationali quapiam exposita, tredecim numero esse lineas Irrationales inter se differentes, de quibus hactenus disputauimus; haec scilicet.

- 1 Media.
- 2 Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inveniuntur.
- 3 Ex binis Mediis prima.
- 4 Ex binis Mediis secunda.
- 5 Maior.
- 6 Rationale, ac Medium potens.
- 7 Bina Media potens.
- 8 Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
- 9 Media Apotome prima.
- 10 Media Apotome secunda.
- 11 Minor.
- 12 Cum Rationali, Medium totum efficiens.
- 13 Cum Medio Medium totum efficiens.

Theor. 89. Propos. 13.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eis, quæ est ex binis nominibus, & in eadē proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.



SIT recta a , Rationalis, & $b c$, sit ex binis nominibus vel prima, vel secunda, & c . cuius maius nomen sit $b d$, & ad $b c$, applicetur rectangulum aequalē quadrato ex Rationali a , descripto, faciens latitudinem $b f$. Dico rectam $b f$, esse Apotomen, cuius nomina hoc est tota $b f$, & illi congruens sunt commensurabilia nominibus linea e ex binis nominibus $b c$, & in eadem proportione, & denique Apotomen $b f$, eandem esse ordine ipsi $b c$. Applicetur deinde ad minus nomen $d c$, linea e ex binis nominibus $b c$, rectangulum $c g$, quadrato ex Rationali a , aequalē. Ac proinde & rectangulo $b e$, faciatque latitudinem $d g$, sitque recta $d g$, recta $b b$, aequalis. Quoniam igitur rectangula $b e$, & $c g$, aequalia sunt, erit ut $b c$, ad $d c$, ita $d g$, hoc est sibi aequalis $b h$, ad $b f$, ut constat ex propositionibus 14. & 16. lib. 6. & diuidendo ut recta $b d$, ad rectam $d c$, ita recta $b f$, ad rectam $f b$. At recta $b d$, maior est, quam recta $d c$. Quare ex $b f$, maior erit, quam $f b$. Ponatur igitur recta $f i$, ipsi $f b$, aequalis, & fiat ut $h i$, ad $i f$, ita $f b$, ad $b k$. Quare erit componendo ut $b f$, ad $i f$, hoc est ad sibi aequali $b f$, ita $f k$, ad $b k$, sed ostendimus esse ut $b f$, ad $b f$, ita $b d$, ad $d c$. Quare erit ut $b d$, ad $d c$, ita $f k$, ad $b k$, sunt autem recta $b d$, $d c$, Rationales, & tantum potentia inter se commensurabiles (cum sine nomina linea e $b c$, ex binis nominibus.) Quare recta $f k$, $b k$, potentia etiam tantum erunt commensurabiles, ut vult 10. propos. libri huic.

Rursus quia est ut recta $b f$, ad rectam $b k$, ita recta $f k$, ad rectam $b k$, erunt quoque $b f$, $f k$, antecedentes simul, nempe tota $b k$, ad $b f$, & $b k$, consequentes simul, hoc est, ad eorum $f k$, ut recta $f k$, ad rectam $b k$, ut vult 12. propos. lib. 5. Quare erit recta $f k$, Media proportionalis inter $b k$, & $b k$, ac propterea ex corollario Clavi propos. 20. lib. 6. erit ut $b k$, prima ad $b k$, tertiam, ita quadratum ex $b k$, prima ad quadratum ex $f k$, secunda.

Quoniam vero rectangulum $c g$, Rationale existit (est enim rectangulum illud quadrato ex Rationali a , aequalē) ad Rationalem $d c$, sit applicatum, facit $d g$, latitudinem Rationalem, & ipsi $d c$, longitudine commensurabilem, ut vult 21. prop. lib. huic. Quare recta $b b$, ipsi $d g$, aequalis, erit Rationalis, & longitudine commensurabilis ipsi $d c$. Cum autem iam sit demonstrata esse, ut recta $b d$, ad rectam $d c$, ita recta $f k$, ad rectam $b k$, ut autem recta $f k$, ad rectam $b k$, ita recta $b k$, ad rectam $f k$, erit quoque ut $b d$, ad $d c$, ita recta $b k$, ad rectam $f k$, ac proinde ex 22. propos. lib. 6. erit quadratum ex recta $b d$, ad quadratum ex recta $d c$, ut quadratum ex recta $b k$, ad quadratum ex recta $f k$.

Quadratum autem ex $b d$, quadrato ex $d c$, est commensurabile, (cum recta $b d$, $d c$, sint Rationales, & tantum potentia commensurabiles.) Quare quadratum ex recta $b k$, Quadrato ex recta $f k$, erit commensurabile, ut vult 10. propos. lib. huic.

Sed quadratum ex recta $b k$, ad quadratum ex $f k$, iam est ostensum esse, ut recta $b k$, ad rectam $b k$, Quare longitudine sunt commensurabiles $b k$, & $b k$, ac propterea ex reliqua $b b$, ex corollario Clavi propos. 16. lib. huic. Rationalis autem est demonstrata recta $b b$. Igitur & illi commensurabilis recta $b k$, Rationalis est, recta quoque $b k$, ipsi Rationali $b k$, commensurabilis, Rationalis erit.

Quoniam vero recta $f k$, recta $b k$, tantum sit commensurabilis potentia ostensa, erit ideo & $f k$, Rationalis, ac propterea cum $f k$, $b k$, sint Rationales, & tantum potentia demonstratae commensurabiles, erit ex 74. propos. lib. huic reliqua $b f$, Apotome, & ei congruens $b k$. Quod primum erat ostendendum.

Cum autem sit demonstratum rectam $b k$, esse parti $b k$, longitudine commensurabilem, erunt idcirco recta $b k$, $b b$, longitudine inter se commensurabiles. Est autem recta $b b$, longitudine ostensa commensurabilis ipsi $d c$. Quare ex scholio Clavi 12. propos. lib. huic erit $b k$, eidem

$d c$, longitudine commensurabilis. Rursus cum iam demonstratum sit esse, ut recta $b d$, ad rectam $d c$, ita recta $f k$, ad $b k$. Et permutando ut $b d$, ad $f k$, ita $d c$, ad $b k$, sunt autem $d c, b k$, longitudine commensurabiles demonstratae: Quare et recta $b d$, $f k$, longitudine etiam commensurabiles erunt, ex 10. propos. lib. huius. Quare cum recta $f k$, ipsi $b d$, et recta $b k$, ipsi $d c$, sit longitudine commensurabilis, erunt nomina ipsius Apotomae $f b$, nimirum $f k, i k$, nominibus $b d$, $d c$, linea ex binis nominibus $b c$, commensurabilia longitudine. Quod iterum erat demonstrandum.

Rursus, quia est $b d$, ad $d c$, ita $f k$, ad $b k$, erunt igitur nomina $f k, b k$, Apotomae in eadem proportione cum nominibus $b d, d c$, linea ex binis nominibus $b c$, Quod iterum nobis erat demonstrandum.

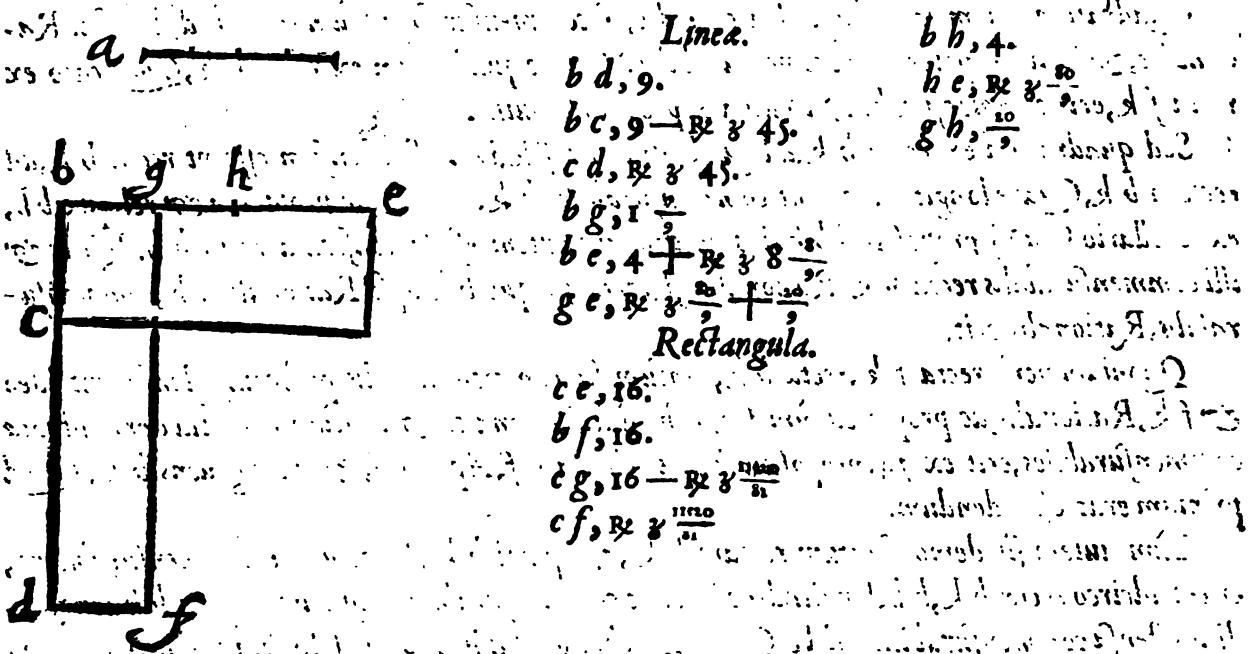
Postremo aut $b d$, plus poterit, quam $d c$, quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit $b d$, quam $d c$, quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine. Cum sit ut $b d$, ad $d c$, ita $f k$, ad $b k$, poterit quoque ex 15. propos. libri huius, recta $f k$, plus, quam $b k$, quadrato etiam rectae sibi longitudine commensurabilis.

Si vera plus possit $b d$, quam $d c$, quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, idem concludes de rectis $f k, b k$, et si recta $b d$, Rationali exposita longitudine fuerit commensurabilis, idem dices de recta $f k$, ut vult scholium Clavi 12. propos. lib. huius. Si verò $d c$, Rationali exposita longitudine sit commensurabilis idem affirmare poteris de recta $b k$, Quod si neutra ipsarum $b d, d c$, Rationali exposita longitudine sit commensurabilis, idem dices de rectis $f k, b k$, ex 14. propos. lib. huius.

Quare Apotome, $b f$, eadem est ordine linea $b c$, ex binis nominibus, ut constat ex definit. tertii et quarti. Quod iterum nobis erat ostendendum. Quadratum igitur Rationalius, etc. Quod erat demonstrandum.

Theor. 90. Propos. 114.

Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt. Apotoma nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus sit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.



Sic

SIT Rationalis a ; ex recta b , c , Apotome illaque congruens $c:d$; ex ad rectam b , c , applicatur rectangularum $c:e$, aequalē quadrato ex Rationali a , faciens latitudinem $b:e$. Dico $b:e$, esse unam ex binis nominibus, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus $b:d, c:d$. Apotome $b:c$, ex in eadem proportione, et denique $b:e$, esse ordine eadem ipsi $b:c$, Apotoma.

Rursus ad totam $b:d$, aliud rectangularum applicetur quadrato ex Rationali a , aequalē, sicutque illud $b:f$, faciens latitudinem $b:g$.

Igitur cum rectangularia $c:e$, $b:f$, aequalia sint, etiam $v:b:e$, ad $b:g$, ita $b:d$, ad $b:c$, ut constat ex 14. & 16. propositionibus lib. 6. ex conuertendo, vi $b:e$, ad $g:e$, ita $b:d$, ad $c:d$.

Secetur quoque $e:g$, ad h , secundum proportionem $b:e$, ad $g:e$, ex ijs, quae tradidit Clavius in scholio propos. 16. lib. 6. ut sit $e:h$, ad $h:g$, que etiam ad modum $b:c$, ad $g:e$:

Quoniam igitur ut tota $b:e$, ad totam $g:e$, ita $e:h$, et $b:c$, ablatas id est $h:g$, ex $g:e$, ablatam, erit quoque reliqua $b:h$, ipsius $b:c$, ad $h:e$, reliquam ipsius $g:e$, ut tota $b:e$, ad totam $g:e$. Erat autem ut $b:e$, ad $g:e$, ita $e:h$, ad $h:g$. Erit igitur quoque ut $b:h$, ad $h:e$, ita $e:h$, ad $g:h$, ac proinde $h:e$. Media est proportionalis inter rectas $b:h$, $g:h$, Quocirca erit ut prima $b:h$, ad $g:h$, tertiam, ita quadratum ex $b:h$, ad quadratum ex $h:e$, secundam ex corollario Clavius propos. 20. lib. 6. Quoniam vero fuit ut $b:d$, ad $c:d$, ita $b:e$, ad $g:e$, hoc est $b:h$, ad $h:e$, sicutque $b:d$, $c:d$. Rationales potentia tantum commensurabiles (cum sint nomina Apotoma $b:c$) erunt igitur $b:h$, $h:e$, tantum commensurabiles potentia, ex quadrata ex $b:h$, & $h:e$, commensurabilia, rectæ etiam $b:h$, $g:h$, eandem habentes rationem cum quadratis ex $b:h$, $h:e$, ut demonstrauimus, sunt longitudine commensurabiles, ac propterea tota $b:h$, longitudine existens commensurabilis parti $g:h$, longitudine quoque erit commensurabilis reliqua parti $b:g$, ex corollario Clavius propos. 16. lib. huius.

Cum autem $b:d$, sit Rationalis, nempe maius nomen Apotoma $b:c$, sicutque rectangularum $b:f$, quadrato ex Rationali a , aequalē, Rationale, erit ex 21. propos. lib. huius recta $b:g$, ipsi $b:d$, commensurabilis longitudine; Quare ex iis, quae tradidit Clavius in scholio propos. 12. lib. huius recta $b:h$, eidem $b:d$, Rationalis commensurabilis longitudine, Rationalis est, (sunt enim recta $b:h$, $h:g$, longitudine ostensa commensurabiles.) Quoniam vero $b:h$, $h:e$, sunt ostensa potentia tantum commensurabiles, & $b:h$, Rationalis sit demonstrata, erit etiam $h:e$, illi commensurabilis, Rationalis. Quare $b:h$, $h:e$, Rationales sunt, & tantum potentia inter se commensurabiles, ac proinde $b:e$, ex illis composita ex binis nominibus est ut vult 37. propos. lib. huius. Quod est primum.

Rursus cum iam à nobis sit ostensum esse $b:h$, ad $h:e$, ut $b:d$, ad $c:d$, & permutando ut $b:h$, ad $b:d$, ita $h:e$, ad $c:d$, sit autem recta $b:h$, demonstrata longitudine commensurabilis ipsi $b:d$, erit quoque ex 10. propos. lib. huius recta $b:e$, ipsi $c:d$, commensurabilis longitudine. Quare $b:h$, $h:e$, nomina linea $b:c$, ex binis nominibus longitudine sunt commensurabilia nominibus $b:d$, $c:d$, Apotoma $b:c$, Quod est secundum. Imo & in eadem proportione, cum sit ostensum esse $b:h$, ad $h:e$, ut $b:d$, ad $c:d$, Quod est tertium.

Postremò aut $b:d$, plus poteris, quam $c:d$, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus posse, quam $c:d$, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, idem concludere poteris de recta $b:h$, ut vult 15. propos. lib. huius.

Si vero $b:d$, plus possit, quam $c:d$, quadrato rectæ sibi incommensurabilis longitudine, idem dices de $b:h$, ut constat ex 15. propos. lib. huius.

Quod si $b:d$, Rationali expositæ sit longitudine commensurabilis erit & $b:h$, eidem longitudine commensurabilis, ex scholio Clavius propos. 12. lib. huius. Si vero $c:d$, minus nomen Rationali expositæ longitudine commensurabilis existit, idem concludere de recta $h:e$. Sed si neutra ipsarum $b:d$, $c:d$, Rationali expositæ sit longitudine commensurabilis, neutra etiam ipsarum $b:h$, $h:e$, ei-

$\epsilon\gamma$ Rationali exposita a c, longitudine incommensurabilem, ex 23. propos. lib. huius.

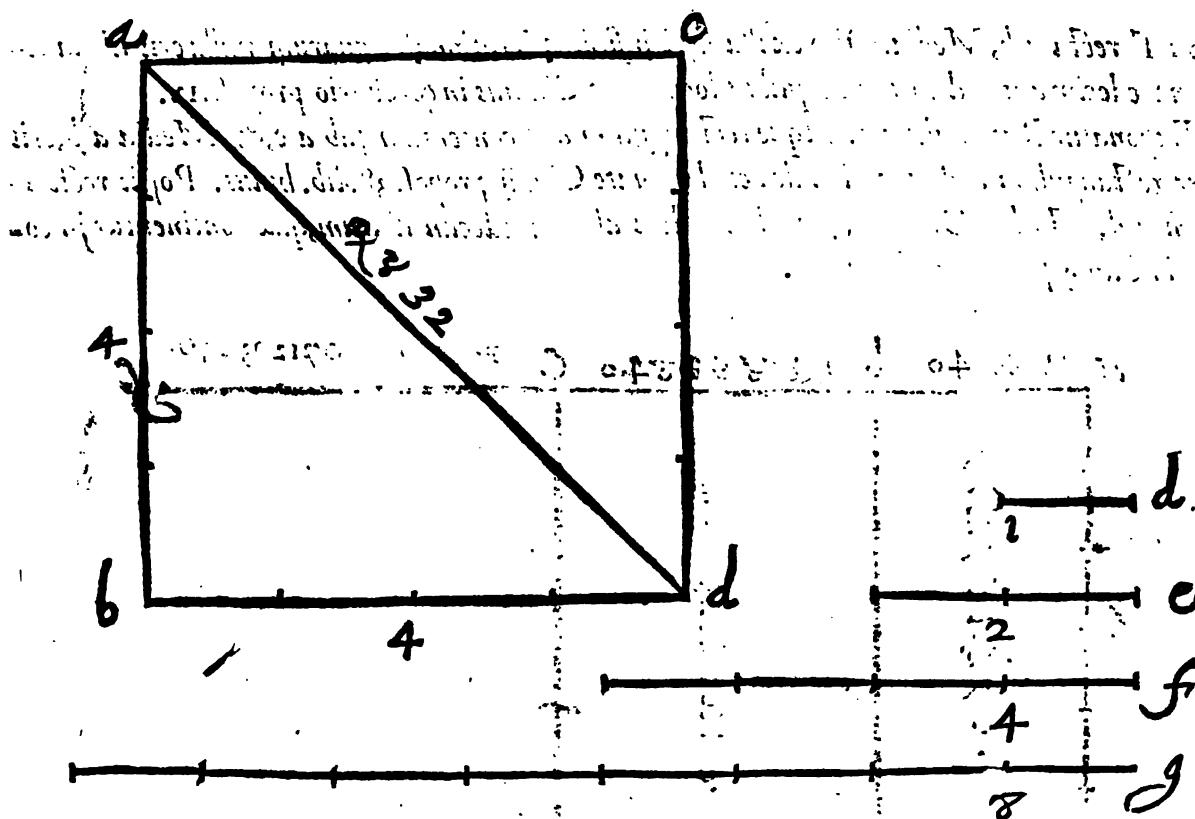
Quadrata vero reliquarum duodecim linearum Irrationalium ad Rationalem applicata, faciant latitudines, vel ex binis nominibus, vel Apotomas, ut propositionibus antecedentibus sunt ostensa. Sed quadratum huius Irrationalis b e, ad eandem Rationalem a c, applicatum latitudinem faciet a b, Medium. Quare constat lineam Irrationalem b e, non esse unam ex illis tredecim, de quibus loquuti sumus, cum quadratum eius ad Rationalem applicatum latitudinem efficiat differentem a latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

Si vero rectangulum d e, compleatur contentum sub b d, Rationali, et b e, Irrationali, erit rectangulum illud Irrationale ex lemmate Clavi propos. 38. lib. huius. Posit enim recta e f, rectangulum d e, que ex definitione 11. Irrationale est: Dico rursus e f, non esse eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi b e. Hoc enim manifeste indicatur, Cum quadratum eius ad Rationalem applicatum faciat latitudinem b e, Quadrata vero harum tredecim, si ad eandem Rationalem sint applicata, efficiant latitudines prorsus differentes, a, b, e, ut iam fuit demonstratum.

Pari ratione aliae infinitae Irrationales possunt reperiri inter se, et a predictis differentes. Igitur a Media infinitae Irrationales fiant. Quod erat ostendendum.

Theor. 93. Propos. 117.

PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine,



SIT ex a b, descriptum quadratum, cuius diameter sic a d. Dico latens quadrati diametro a d, longitudine esse incommensurabile: Cum enim a b, b d, sint linea aequales, erit quadratum ex diametro a d, aequaliter quadrato ex illis duabus rectis a b, b d, ex 47. lib. i. id est quadratum diametri, duplum erit quadrato ex latere quadrati.

Suman

Sumantur ex secunda propos. lib. 8. quotcumque numeri ab unitate incipientes in proportione dupla, nimis in proportione lateris quadrati, et diametri, sintque numeri illi d, e, f, g, id est 1, 2, 4, 8. Quoniam igitur primus ab unitate non est quadratus, sed primus nullus alius praeter tertium ab unitate, et vnum relinquentes omnes erit quadratus, ut vult 10. propos. lib. 9. Quare proportio, quae est inter latera quadrati, et diametrum, cadet necessario inter numerum quadratum, et non quadratum, ut nimis inter numeros d, ad e, vel e, ad f, vel f, ad g, et c. Sed inter hos numeros non reperitur proportio, quam quadratus numerus habet ad numerum quadratum, nec etiam inter quadrata latera quadrati a, c, et diametri a, d, eadem etiam proportio inuenietur. Igitur cum 9. propos. lib. huius recte concluditur latera quadrati a, c, incommensurabilia esse longitudine diametro a, d. Non igitur latus quadrati, et c. Quod erat demonstrandum.

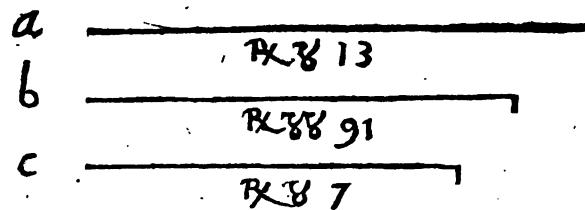
S C H O L I V M · EX CL A V I O.

SEDE affirmatiuè hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex iis, qua in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. et c. Et quis sumptis in proportione dupla quotcumque numeri ab unitate 1. 2. 4. 8. 16. 64. et c. solum tertius ab unitate quadratus est, et ceteri omnes, vnum intermissentes, quod primus ab unitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solum hi numeri 4. 16. 64. quadrati, reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, et 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum, (alias et 2. quadratus esset) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quid est propositum.

Hoc etiam theorema alter demonstramus ad finem defin. 8. lib. 5. et in scholio propos. 8. lib. 8. et in scholio propos. 9. huius libri.

Ceterum in exemplaribus Grecois reperitur hoc loco appendix quedam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometriae libris pendet, ut merito omitti posset. Verumqua in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, et incommensurabilitatem pertinens: vix est eam paucis ex plicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometria, que ad demonstrationem eorum, que hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hec.

Invenitis lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inuenientur et alia quamplurima magnitudines, plane scilicet, atque solidae incommensurabiles inter se. Sint enim rectae a, c, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit b. Quoniam igitur ex corollario propos. 20. lib. 6. ut a, ad c, ita est figura rectilinea quavis super a, constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterque posita super b, et sunt a, et c, longitudine incommensurabiles, erunt rectilineae illa figura super a, et b, incommensurabiles.



Rursus quoniam circuli, quorum diametri a, b, proportionem habent; quam quadrata ex a, et b, descripta: Quadrata autem haec, cum sine figura rectilinea similes, similiterque posita, proportionem habent, quam rectae a, et c, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Habeant quoque circuli diametrorum a, b, eandem proportionem quam a, c. Sed rectae a, c, incommensurabiles sunt longitudine. Igitur et circuli diametrorum a, b, incommensurabiles sunt.

Iam vero si conficiantur solidae, nempe pyramides, vel prismata, eiusdem altitudinis, quorum bases sint figure rectilineae similes, similiterque descriptae super a, b, habebunt pyramides, atque prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineae illae figure. Quare cum rectilineae illae figure incommensurabiles sunt, ut modo est demonstratum; incommensurabilia etiam erunt ipsa solidae, nimis pyramides, et prismata.

Quod si coni, vel cylindri, aequè alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum a, b, habebunt huiusmodi coni, et cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles, erunt quoque incommensurabiles dicti coni, et cylindri. Immenae sunt igitur non solum linea, et superficies incommensurabiles, verum etiam corpora, sive solidae incommensurabiles. Quid est propositum.

Eadem autem ratione, si rectae a, et b, longitudine commensurabiles sint, ostendemus earum figuram rectilineas similes, similiterque descriptas, nec non et ipsarum circulos, commensurabiles esse, atque adeo et earumdem pyramides, et prismata; ac denique conos, et cylindros; si modo eandem habeant altitudinem, ut perspicuum est.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

S F



Extract du Priuilege du Roy.

PAR Priuilege du Roy, il est permis à Iean de Heuqueuille, d'imprimer ou faire imprimer, vendre & distribuer vn Liure intitulé *Euclidis elementum decimum, in quo singularum demonstrationum linea, & superficies, tam Commensurabiles, & Incommensurabiles, Quam Rationales, & Irrationales, accuratè numeris exprimuntur. Authore Florimondo Puteano, Vatani Domino*: Auec defences à tous Imprimeurs, Libraires, & autres, d'imprimer ou faire imprimer, ny exposer en vente ledict Liure, sans le consentement dudict de Heuqueuille, iusques à six ans finis & accomplis, à compter du iour qu'ils feront acheuez d'imprimer, à peine de confiscation desdits Liures & exemplaires qui se trouueront imprimez d'autre impression que de la sienne, comme plus amplement est porté par ledit Priuilege. Donné à Paris le 28. Auriil mil six cens douze.

PAR LE CONSEIL.

Signé

BERGERON.

E R R A T A.

Pagina quinta, linea vigesima prima, aream quendam, lege aream quandam.

Pagina 9. linea duodecima, inietetur quædam reliqua ræcedentem, lege præcedentem.

Omissa in margine.

Pagina 114. linea 14. 37. decimi. Pagina 115. linea 4. 38. decimi, linea 30. 39. decimi.

Pagina 116. linea 19. 40. decimi. Pagina 117. linea 10. 41. decimi. Pagina 118. linea 5. 42. decimi. Pagina 131. linea 36. lege Apotoma.

